



th.
78
2

cke,
all-
tur

Lith. 378 ^K₌

Lohncke

<36632269580019

<36632269580019

Bayer. Staatsbibliothek



ENTWICKELUNG

EINER

THEORIE DER KRYSTALLSTRUKTUR

VON

DR. LEONHARD SOHNCKE,

ORD. PROFESSOR DER PHYSIK AM POLYTECHNIKUM ZU KARLSRUHE.



MIT 55 HOLZSCHNITTEN IM TEXT UND 5 LITHOGR. TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1879.



Das Recht der Uebersetzung wird vorbehalten.

Vorwort.

Während sich die Physik in den letzten Jahrzehnten vorzugsweise mit dem Studium der in gasförmigem Zustande befindlichen Körper beschäftigte, scheint sich das Interesse jetzt allmählich wieder mehr dem Verhalten der festen Körper zuzuwenden, wie aus der wachsenden Zahl derartiger Untersuchungen (z. B. über elastische Nachwirkung, über Elasticität krystallisirter Körper, u. A.) hervorgeht. Dadurch muss auch die Frage nach dem Wesen der Krystalle nothwendig wieder mehr in den Vordergrund treten, eine Frage, deren Studium mich seit vielen Jahren unausgesetzt beschäftigt hat, und zu deren Beantwortung die vorliegende Schrift einen Beitrag zu liefern bestimmt ist. Man findet hier die ganze Mannichfaltigkeit der überhaupt möglichen Krystallstrukturen aus einem einzigen Princip, nämlich aus dem selbstverständlichen Grundsatz von der regelmässigen Anordnung, auf streng mathematischem Wege abgeleitet. Die geometrischen Resultate dieser Untersuchung sind von mir schon vor 3 Jahren in einer eignen Brochüre veröffentlicht worden („Die unbegrenzten regelmässigen Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur. Karlsruhe 1876“), gegenwärtig wird die ausführliche Ableitung gegeben; manche der damals für die einzelnen Strukturformen gewählten Namen sind jetzt durch passendere ersetzt, doch sind die früheren Namen unter dem Text immer noch angegeben.

Die mathematische Methode der Untersuchung rührt von Herrn Camille Jordan her; derselbe hat in einer umfangreichen Abhandlung eine Aufgabe aus der Geometrie der Bewegung gelöst, welche die vorliegende krystallographische Aufgabe mit umschliesst. Weil es mir indessen früher ge-

lungen war, in jener Abhandlung ausser einigen kleineren Ungenauigkeiten eine grössere Lücke zu entdecken, so glaubte ich mich gegen irgend welche Irrthümer nicht anders sichern zu können als dadurch, dass ich die ganze Untersuchung, soweit sie auf Krystallographie Bezug hat, selbstständig von vorn anfang, natürlich mit Benutzung des bewährten Grundgedankens der Jordan'schen Methode. Trotz der principiellen Uebereinstimmung, welche dadurch meine Untersuchung im Allgemeinen mit der Jordan'schen Arbeit bekommen musste, zeigen sich doch auch erhebliche Abweichungen, die vorzugsweise darin bestehen, dass ich überall auf die geometrische Deutung der Resultate das Hauptgewicht lege, denn die Auffindung der Strukturformen war ja mein einziges Ziel.

Zum Verständniss der ganzen Schrift ist keine höhere Mathematik, vielmehr nur ein kleiner Theil der elementaren, erforderlich; dagegen werden an das räumliche Anschauungsvermögen gewisse unumgängliche Anforderungen gestellt. Weil die Schrift sich keineswegs ausschliesslich an Mathematiker, sondern wesentlich an Naturforscher (Physiker, Krystallographen, Mineralogen, Chemiker) wendet, so habe ich es für nöthig gehalten, die wenigen kinematischen Hülfsätze, die bei den folgenden Entwicklungen benutzt werden, mit Angabe der sehr einfachen Beweise, im § 4 zusammenzustellen. Ueberhaupt ist der, freilich schwer durchführbare, Versuch gemacht, die Darstellung so zu halten, dass sie Lesern von ganz verschiedener mathematischer Vorbildung genügt.

Zu möglichst leichtem Eindringen in den eigentlichen Kern der Schrift dürfte es sich vielleicht empfehlen, nach der Einleitung zunächst nur die Erklärungen und die durch den Druck hervorgehobenen Sätze des Abschnitt I, unter Weglassung der Beweise, zu lesen, den Abschnitt II nur zu durchfliegen und sobald als möglich zu der tabellarischen Uebersicht aller regelmässigen Punktsysteme (§ 27) vorzudringen, deren Verständniss — mit Hülfe der auf den Tafeln beigegebenen Figuren — das Hauptziel der Schrift sein muss. Nächst dieser Uebersicht aller Strukturformen wird für den Naturforscher wohl die historische Einleitung und der Abschnitt III von Interesse sein; in letzterem ist der Nachweis der allgemeinen Uebereinstimmung der Theorie mit den Erfahrungs-

thatsachen enthalten. In dieser Beziehung möchte ich besonders die Erklärung des optischen Drehvermögens von Krystallen (§ 41) hervorheben; ferner den Nachweis, dass die Hemimorphie nicht in der Anordnung der Krystallelemente, sondern unmittelbar in der Beschaffenheit des einzelnen Elements begründet ist (§ 34). Endlich verdient die gelegentlich aufgestellte Eintheilung aller physikalischen Eigenschaften der Krystalle in 2 Gruppen (§ 37) vielleicht einige Beachtung.

Mineralogisch - krystallographische Detailangaben habe ich wesentlich aus den 3 Werken: Groth, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1876; Naumann-Zirkel, Elemente der Mineralogie. 1877; A. Knop, System der Anorganographie. Leipzig 1876, entnommen; ausserdem bin ich Herrn A. Knop für mancherlei werthvolle mündliche Mittheilungen zu Danke verpflichtet. Bezüglich der physikalischen Eigenschaften bin ich überall auf die Originalabhandlungen zurückgegangen.

Karlsruhe, März 1879.

Der Verfasser.

Angabe der Stellen, wo folgende theils neue, theils nicht
allgemein bekannte Benennungen erklärt sind.

	Seite
1) Raumgitter	14
2) Centrirung einer Figur	20
3) Regelmässiges Punktsystem	28
4) Schiebung, Drehung, Schraubung	29 u. 30
5) Aequivalente Bewegungen	30
6) Deckbewegung	29
7) Charakteristische Deckbewegung um eine Axe.	40
8) Symmetrieaxe nach Bravais	19
9) Axe eines Systems	36
10) n -zählige Axe eines Systems.	40
11) Gleichheit von Axen	37
12) Hauptaxe	48
13) Queraxe	104
14) Konstruktionsaxe	107
15) e und a	65
16) Hauptebene	65
17) Elementardreieck, Elementarparallelogramm	74 u. 75
18) n -punktschraube	80
19) Zusammengesetzte n -punktschraube.	108
20) Rechtsgewundene Schraube	80
21) Gewundene Säule.	111
22) Halbregelmässiges Vieleck	107
23) Gleichflächiges Tetraëder oder rhombisches Sphenoid	112
24) 12-punktner	156
25) 24-punktner	166

I n h a l t.

Vorwort	Seite III
-------------------	--------------

Abschnitt I.

Vorbereitende Betrachtungen.

Capitel I. Einleitung.	
§ 1. Begriff der Krystallstruktur	3
§ 2. Historische Einleitung.	5
Capitel II. Grundlegendes.	
§ 3. Hypothese	27
§ 4. Kinematische Hilfsbetrachtungen	29
Capitel III. Die verschiedenen möglichen Arten und Richtungen von Axen in regelmässigen unendlichen Punktsystemen.	
§ 5. Die verschiedenen möglichen Axenarten	36
§ 6. Die verschiedenen möglichen Richtungen von gleichen Axen	41
§ 7. Arten und Richtungen der verschiedenen in demselben System vorhandenen Axen	48

Abschnitt II.

Konstruktion der regelmässigen allseitig unendlichen Punktsysteme.

Capitel IV. Punktsysteme ohne Axen.	
§ 8. Konstruktion der Systeme ohne Axen	63
Capitel V. Punktsysteme mit Hauptaxen von einer einzigen Richtung.	
§ 9. Anordnung der Axen in solchen Systemen, deren Hauptaxen in lauter parallelen Geraden liegen	65
§ 10. Allgemeine Sätze über Punktsysteme mit einer einzigen Axenrichtung	75
§ 11. Konstruktion der Systeme mit 6-zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung	82
§ 12. Konstruktion der Systeme mit 4-zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung	86
§ 13. Konstruktion der Systeme mit 3-zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung	92
§ 14. Konstruktion der Systeme mit 2-zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung	98
Capitel VI. Punktsysteme mit gleichen Hauptaxen von zwei entgegengesetzten Richtungen.	
§ 15. Allgemeine Vorbetrachtungen zur Konstruktion solcher Systeme	104
§ 16. Konstruktion der Systeme mit 6-zähligen gleichen Hauptaxen von zwei entgegengesetzten Richtungen	112

	Seite
§ 17. Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Haupt- axen von 2 entgegengesetzten Richtungen	117
§ 18. Fortsetzung	123
§ 19. Konstruktion der Systeme mit 3-zähligen gleichen Haupt- axen von 2 entgegengesetzten Richtungen	127
§ 20. Fortsetzung	131
§ 21. Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Haupt- axen von 2 entgegengesetzten Richtungen	135
§ 22. Fortsetzung	142
§ 23. Fortsetzung	147
§ 24. Fortsetzung	150
Capitel VII. Punktsysteme mit gleichen Hauptaxen nach mehr als 2 Richtungen.	
§ 25. Konstruktion der Systeme mit 3-zähligen gleichen Haupt- axen parallel den Radien nach den Ecken eines regulä- ren Tetraëders	153
§ 26. Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Haupt- axen parallel den Radien nach den Ecken eines regulä- ren Oktaëders	161
Capitel VIII. Die Gesammtheit der regelmässigen all- seitig unendlichen Punktsysteme.	
§ 27. Uebersichtstabelle	175
§ 28. Beziehung der regelmässigen Punktsysteme zu den Raum- gittern.	177
§ 29. Modelle	179

Abschnitt III.

Prüfung der Theorie an der Erfahrung.

Capitel IX. Geometrische Eigenschaften der Krystalle.	
§ 30. Die Krystallsysteme.	183
§ 31. Halbflächige und viertelflächige Gestalten.	185
§ 32. Verschiedenheiten innerhalb eines Krystallsystems	192
§ 33. Grenzformen	194
§ 34. Hemimorphe Gestalten	199
§ 35. Isomorphie	205
Capitel X. Physikalische Eigenschaften der Krystalle.	
§ 36. Abhängigkeit von der Richtung, Unabhängigkeit vom Ort	207
§ 37. Eintheilung der physikalischen Eigenschaften in zwei Gruppen	211
§ 38. Erste Gruppe von Eigenschaften. a) Von der Cohäsion abhängige	212
§ 39. Erste Gruppe von Eigenschaften, Fortsetzung. b) Pyro- elektricität.	223
§ 40. Zweite Gruppe von Eigenschaften	228
§ 41. Zweite Gruppe von Eigenschaften, Fortsetzung. Das optische Drehvermögen von Krystallen	238
§ 42. Schluss	246
Erklärung der Tafeln	248

Abschnitt I.
Vorbereitende Betrachtungen.



Capitel I.

Einleitung.

§ 1. Begriff der Krystallstruktur.

Die ebenflächige Begrenzung ist zwar das auffallendste, aber nicht das wesentlichste Merkmal der Krystalle, sondern nur eins neben anderen; denn nicht jeder beliebige ebenflächig begrenzte Körper ist ein Krystall; andererseits hört ein Krystall nicht auf, ein solcher zu sein, auch wenn seine ebenflächige Begrenzung zerstört ist. Charakteristisch für den krystallisirten Körper ist vielmehr dies, dass er nach verschiedenen in ihm gezogenen Richtungen im Allgemeinen ein verschiedenes Verhalten zeigt (jedoch kann dasselbe für einige unter allen Richtungen übereinstimmen). Vorzüglich Cohäsion und Elasticität, mit gewissen Einschränkungen aber auch Wärmeausdehnung, Wärmeleitung, Verwitterbarkeit, Durchstrahlbarkeit, Lichtbrechung, elektrisches und magnetisches Verhalten sind verschieden in den verschiedenen Richtungen; desgleichen ist auch die Anordnung der ebenen Grenzflächen nach den verschiedenen Richtungen hin eine verschiedene. Eine charakteristische Folge der mit der Richtung wechselnden Cohäsion ist sodann die den meisten Krystallen zukommende Eigenschaft, sich nach Ebenen von bestimmter Lage besonders leicht spalten zu lassen. — Der Krystall ist ferner ein homogener Körper; er besitzt keinen physisch ausgezeichneten Punkt, namentlich keinen Mittelpunkt. An welcher Stelle man auch aus dem Inneren eines Krystalls ein Stück herausnimmt: es zeigt immer dieselben,

nur von der Richtung abhängigen Eigenschaften. Hiernach hat man folgende Erklärung:

Ein Krystall ist ein homogener fester Körper, dessen geometrisches und physikalisches Gesamtverhalten nach den verschiedenen in ihm gezogenen Richtungen hin im Allgemeinen verschieden ist, und der bei ungestörter Ausbildung von ebenen Flächen begrenzt ist.

Die Ausdehnung der Grenzflächen ist regellos; fest bestimmt sind nur die Winkel, unter denen sie sich schneiden. Denkt man aber die physisch gleichwerthigen Flächen nicht verzerrt, sondern auch geometrisch gleichmässig ausgebildet, so zeigen sich die meisten dieser idealen Krystallgestalten mit Symmetrie begabt, nach deren höherem oder geringerem Grade sie in Gruppen (Krystallsysteme) zusammengefasst werden. Genaueres über die verschiedenen Arten von Symmetrie folgt später.

Indem ein Krystall durch äussere Anlagerung von Stofftheilchen wächst, so ist es nicht anders denkbar, als dass er sich in einer gewissen regelmässigen Weise aus denselben aufbaut. *Man versteht nun unter der Struktur eines Krystalls die Anordnung der ihn zusammensetzenden Theilchen.*

[Bei atomistischer Vorstellung bietet der Begriff der Struktur gar keine Schwierigkeit; er ist aber auch bei der Vorstellung kontinuierlicher Raumerfüllung unvermeidlich; die Volumelemente eines Krystalls sind eben nicht beliebig wählbar, sondern sie sind in bestimmter Weise begrenzt und angeordnet zu denken.]

Die Struktur ist die nächste Ursache des verschiedenen Verhaltens eines Krystalls nach den verschiedenen Richtungen hin; daher wird dies Verhalten dem Verständniss näher gerückt, sobald es gelingt, bestimmtere Vorstellungen über die Struktur zu gewinnen.

Natürlich kann die Forschung nicht bei der Erkenntniss der Struktur stehen bleiben, sondern sie muss die Frage nach dem tieferen Grunde der verschiedenen Strukturformen zu beantworten suchen. Wenn es nun auch keinem Zweifel unterliegt, dass die Struktur wesentlich durch die stoffliche, d. h. chemische Beschaffenheit bedingt ist und sich daher aus letzterer ableiten lassen muss, so scheint eine solche Ableitung doch für den gegenwärtigen Zustand unserer Kenntniss

noch ein Problem höherer Ordnung zu sein. Dasselbe wird, als ausserhalb des Rahmens dieser Schrift liegend, nicht weiter berührt werden.¹⁾

§ 2. Historische Einleitung.

Als man anfang sich mit der Theorie der Krystallstruktur zu beschäftigen, waren die Vorstellungen natürlich zunächst nur einzelnen speciellen Fällen angepasst. In der Masse jedoch als die Kenntniss von den krystallisirten Körpern zunahm, wurden auch die theoretischen Vorstellungen von ihrer Struktur bestimmter und umfassender, so dass eine Geschichte dieser Theorien das Bild einer fast stetig fortschreitenden Entwicklung zu immer schärferer und konsequenterer Gestaltung hin darbietet, wie aus den folgenden historischen Andeutungen hervorgehen wird.²⁾

Einer der ersten, die sich genauere Vorstellungen vom Bau der Krystalle zu bilden suchten, scheint Rob. Hooke³⁾

1) Vereinzelte Versuche zur Ableitung der Krystallstruktur aus der chemischen Zusammensetzung sind indessen schon gemacht; so von

Delafosse (Mém. des savants étrangers. T. 13. Paris 1852: Mém. s. une relation import. entre l. compos. atomique et l. forme cristalline);

G. Hinrichs (Atomechanik. Jowa-City 1867. 4^o. 44 S.; ferner: Contributions to Molecular Science or Atomechanics. Jowa 1868);

Schrauf (Lehrb. d. physikal. Mineralog. Bd. II. Wien 1868. Cap. XI. p. 160);

Dana (Sillim. Amer. Journ. 1867. 2 ser. Vol. 44. pag. 89 und 252. „Crystallogenic and Crystallographic Contributions. No. IV: On a connection between Crystalline form and Chemical constitution, etc.“ auszüglich übersetzt in Erdmann u. Werther Journ. f. prakt. Chemie. 1868. Bd. 103. p. 385);

Gaudin (in verschiedenen Abhh., die zusammengefasst sind in: L'architecture du monde des atomes. Paris 1873);

endlich neuerdings von Spring (Hypothèses sur la cristallisation. Liège 1876). — Auch eine ältere Abhandlung von Ampère: S. l. déterm. des proport. dans lesqu. l. corps se combinent d'après l. nombre et l. dispos. resp. des moléc. etc. in den Ann. d. Chim. T. 90. 1814. p. 43—86 steht in genauer Beziehung zu dieser Frage.

2) Die Angaben über die Literatur vor Haüy sind zum Theil aus Marx Gesch. d. Krystallkunde. Karlsruhe 1825 entnommen. In Bezug auf Westfeld u. Bergman folge ich ihm gänzlich.

3) Micrographia. London 1667. fol.

p. 85: I think, had I time and opportunity, I would make probable, that all these regular Figures, that are so conspicuously various

gewesen zu sein. Er entwickelte seine theoretischen Vorstellungen wesentlich an den Krystallformen des Alauns, von denen er zeigte, dass sie sich sämmtlich durch Aneinanderlegung von gleichen Kugeln, und zwar nur durch solche nachahmen lassen. Auch den Würfel des Steinsalzes ahmte er durch kubisch zusammengelegte Kugeln nach. Diese verschiedenen Experimente mit Kugeln erläutert er durch mannigfache Zeichnungen. Da es ihm nun überhaupt gelang, sämmtliche ihm bekannte Krystallgestalten durch Zusammenlegung von Kugeln und von ein oder zwei anderen sehr einfachen Körpern (welche? giebt er nicht an) aufzubauen, so dachte er die Krystalle wirklich durch derartigen Zusammentritt von gleichen Theilchen entstanden, die er in den meisten Fällen als kugelförmig voraussetzte.

Andere Vorstellungen entwickelte gegen den Ausgang des siebzehnten Jahrhunderts Domenico Guglielmini,¹⁾ obwohl auch er wesentlich dasselbe Beispiel des Alauns seinen Betrachtungen zu Grunde legte. Er stellte sich nämlich das Alaunoktaëder aus kleinen Oktaëdern zusammengesetzt vor,

and curious, arise only from three or four several positions or postures of *Globular* particles, and those the most plain, obvious and necessary conjunctions of such figured particles that are possible. . . .

And this I have ad oculum demonstrated with a company of *bullets* and some few other very simple bodies; so that there was not any regular Figure, which I have hitherto met withall, of any of those bodies that I have above named, that I could not with the composition of *bullets* or *globules*, and one or two other bodies, imitate, even almost by shaking them together. . . .

p. 86: And there is no one Figure, into which *Alum* is observed to be crystallized, but may *by this texture of globules* be imitated and by no other. . . .

I could instance also in the Figure of Sea-salt and Sal-gem, that it is composed of a texture of Globules, placed in a *cubical* form, and that all the Figures of those Salts may be *imitated by this texture of Globules*, and by no other whatsoever. And that the forms of Vitriol and of Salt-Peter, as also of Crystal, Hore-frost, etc. are compounded of *these two textures*, but modulated by certain properties.

1) Riflessioni filosofiche dedotte dalle figure de' sale. Bonon. 1688. Dann: De salibus dissertatio epistolaris. 8°. Venet. 1705. Hier heisst es p. 2: Determinatam figuram non ab universali aut particulari architectonico spiritu, sed a primarum particularum schemate unice esse derivandam. p. 10: Corpuscula insectilia, terminata planis superficiebus, ita ad invicem inclinatis, ut simplicem aliquam includant figuram.

welche natürlich leere Zwischenräume zwischen sich liessen. So führte er überhaupt die äussere Krystallgestalt überall auf die Gestalt der Elementartheilchen zurück, welch' letztere er von ebenen Flächen begrenzt sein liess. Er zuerst sprach auch das Princip aus, dass die Spaltbarkeit in Krystallen derselben Substanz konstant dieselben Formen liefert, und diese letzteren legte er den Elementartheilchen bei. Alle Gestalten der Salze dachte er aus denselben Grundformen (Würfel, Oktaëder, sechsseitiges Prisma, geschobenes Prisma) zusammengesetzt, welche mannigfach aufgebaut und durch eine gewisse magnetische Kraft aneinandergezogen und verwoben scheinbar neue Gestalten hervorbringen.

Nach diesen beiden, zu ihrer Zeit wohl nicht hinreichend gewürdigten und doch schon sehr beachtenswerthen, Versuchen nimmt die eigentliche stetige Entwicklung der Theorie ihren Ausgang von der Beobachtung der rhomboëdrischen Spaltbarkeit des Kalkspaths, an welche mehrere Forscher nacheinander ihre theoretischen Ideen anknüpfen. Am frühesten Christian Huygens.¹⁾ Dieser sieht die Regelmässigkeit der Krystalle als eine Folge der Anordnung der sie zusammensetzenden gleichen, aber unsichtbar kleinen, Theilchen an, und denkt sich dieselben beim Kalkspath als Rotationsellipsoide (deren Axenverhältniss sehr nahe $= 1 : \sqrt{8}$), wohl nach Analogie mit der von ihm ermittelten Gestalt der Elementarwellenfläche der ungewöhnlich gebrochenen Strahlen bei derselben Substanz. Ein aus nebeneinandergelegten sich berührenden Rotationsellipsoiden aufgebautes Rhomboëder muss dann nach Ebenen parallel den Rhomboëderflächen zerbrechen, weil sich dabei jedes Sphäroid der einen Schicht nur von dreien der Nachbarschicht trennt, von welchen es sogar nur eins mit der abgeplatteten Oberfläche, die beiden anderen dagegen nur mit den Rändern berührt. Als weiteren Beweis seiner Ansicht führt er die grössere Härte beim Hinab- als beim Herauffahren längs der kurzen Rhombendiagonale an. Während im ersteren Fall das Messer glatt hinübergleitet, fasst es im zweiten die Sphäroide von unten „beinahe wie die Schuppen eines Fische“.

1) *Traité de la lumière*. Leyde 1690. 4^o. p. 92—96. Dann in *Opera reliqua*. Amstelod. 1728: *De lumine*. Cap. V. p. 70.

Huygens' Ideen scheinen keinen fruchtbaren Boden bei seinen Zeitgenossen gefunden zu haben, denn es vergingen mehr als zwei Menschenalter, bis — in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts — die Frage nach der Krystallstruktur von Neuem, und augenscheinlich unabhängig von allen Vorgängern, aufgenommen wurde; und zwar wieder im Anschluss an die Spaltungsbeobachtungen beim Kalkspath. So sagt C. F. G. H. Westfeld¹⁾ bei der Beschreibung der verschieden gestalteten Kalkspathkrystalle: „Alle Spathkrystalle lassen sich aus rautenförmigen Stücken zusammensetzen, oder vielmehr die Natur setzt sie wirklich daraus zusammen; folglich ist die Hauptursache der Bildung bei allen einerlei. Nun fragt es sich nur, warum sich die rautenförmigen Krystalle in Krystalle von einer anderen Bildung zusammensetzen?“

Etwa gleichzeitig gelang es J. G. Gahn, einem Schüler Torbern Bergmans, aus dem Kalkspathskalenoëder einen rhomboëdrischen Kern herauszuschälen. An diese Beobachtung scheint Bergman²⁾ seine theoretischen Entwicklungen angeschlossen zu haben. Weil sich nämlich aus allen, auch noch so verschieden gestalteten Kalkspathkrystallen dasselbe Rhomboëder herauspalten lässt, so nahm er an, sie entstünden sämtlich durch Aufschichtung von rhomboëdrischen Grundkörpern; diese Vorstellung erläutert er durch Zeichnungen, deren eine z. B. das gewöhnliche Kalkspathskalenoëder aus lauter kongruenten, parallel aneinanderliegenden kleinen Rhomboëdern aufgebaut zeigt. Auch die Gestalten des Turmalins, Granats, Schwefelkieses, Hyacinths, Harmotoms und einiger Salze lässt er aus ähnlichen Grundkernen in ähnlicher Weise entstehen.

Wenn hiermit auch schon wesentliche Grundlagen zur Aufstellung einer Theorie der Krystallstruktur gewonnen waren, so ist eine solche in allgemeinsten, das ganze Reich der Krystalle umfassender Weise doch erst von René Just

1) Mineralogische Abhandlungen. Stück 1. Göttingen u. Gotha. 1767. 8°.

2) *Variae crystallorum formae a Spato ortae*, in den *Nov. Acta Reg. Soc. Sc. Upsal.* Vol. I. 4°. 1773. Hier auf pag. 9 not. die Nachricht von der Gahnschen Beobachtung. Ferner: *De formis crystallorum*, in *Opusc.* Vol. II. Ups. 1780.

Haüy¹⁾ entwickelt worden, so dass dieser als der eigentliche Begründer dieses Zweiges der Wissenschaft angesehen werden muss. Es lässt sich kaum feststellen, inwieweit seine Ideen durch die Arbeiten Bergmans beeinflusst worden sind; der Einfluss darf jedenfalls nicht allzu gering angeschlagen werden,²⁾ wenn auch, wie Haüy selbst erzählt,³⁾ die nächste Veranlassung zur Entwicklung seiner Ideen eine in seinem Besitz befindliche sechsseitige Kalkspathsäule mit geraden Endflächen gewesen ist, die schräg abgebrochen war, so dass eine spiegelnde Rhomboëderfläche zum Vorschein kam.

Die bei einem Kalkspathkrystall sich gleichsam von selbst darbietende Vorstellung, dass er aus kongruenten, parallel nebeneinander liegenden Rhomboëdern aufgebaut sei, verallgemeinerte Haüy und dachte sich überhaupt jeden Krystall aus Reihen parallel nebeneinander liegender kongruenter Molekeln von parallelepipedischer Gestalt zusammengesetzt. Von dieser Grundanschauung aus liessen sich dann sämtliche mögliche Krystallformen einer Substanz konstruieren. In welcher Weise Haüy hierbei verfuhr, mag an einem Beispiel verfolgt werden. Gegeben sei ein Würfel, der aus lauter kongruenten, lückenlos

1) Die früheste hergehörige Abh. fällt in das Jahr 1781, nämlich im Journ. de Phys. Mai 1782. p. 366: Extrait d'un Mém. s. l. structure des cristaux, approuvé par l'Acad. Roy. d. Sc. le 21 Févr. 1781. Dann Journ. d. Phys. Juillet 1782. p. 33: Mém. s. l. structure des spaths calcaires. 22 Dec. 1781. Andere hergehörige Schriften sind: Essai d'une Théorie s. l. structure des cristaux. Paris 1784. 8°. Traité de Cristallographie. 2 vol. in 8°. avec Atlas in 4°. Paris 1822. Traité de Minéralogie. Sec. édit. Paris 1822.

2) Essai d'une théorie etc. p. 39: Dans le temps, où je commençais à me livrer à l'étude de la structure des cristaux, j'ai eu occasion de lire un Mém. de M. Bergman sur la cristallisation, qui se trouve parmi ceux de l'Acad. d'Upsal pour l'année 1779. Im Traité de Minéral. (1822) I. p. 15, Anmerkung, heisst es: l'Académie des Sciences avait déjà connaissance de mes premiers essais lorsqu'elle reçut le Mém. de Bergman, qui me fut communiqué, comme étant propre à m'intéresser par le rapport qu'il avait avec mon travail.

3) Essai d'une théorie etc. p. 10: „Une observation que je fis sur le spath calcaire en prisme à six plans, terminé par deux faces exagones, me suggéra l'idée fondamentale de toute la théorie dont il s'agit. J'avois remarqué qu'un cristal de cette variété se trouvoit cassé obliquement, de manière que la fracture présentait une coupe nette, et qui avoit ce brillant, auquel on reconnoît le poli de la Nature.“ Aehnliche Aeusserung im Traité de Cristall. I. p. 32.

neben- und aufeinandergeschichteten parallelen Würfelchen aufgebaut sei. Legt man nun auf alle Seitenflächen des Würfels Schichten und immer neue Schichten jener kleinen Würfel, so jedoch, dass jede folgende Schicht an jedem ihrer 4 Ränder um eine Molekelreihe schmäler als die vorhergehende Schicht ist, so findet sich dadurch schliesslich auf jede Würfelfläche eine vierseitige Pyramide mit treppenförmigen Flächen aufgesetzt. Weil nun hierbei die in einer ursprünglichen Würfelkante zusammenstossenden Seiten zweier Nachbarpyramiden in eine Ebene fallen, so ist hierdurch das Rhombendodekaëder abgeleitet. Ändert man bei dieser Konstruktion nur das eine, dass man jede folgende Schicht an jedem ihrer Ränder um zwei Molekelreihen schmäler macht als die vorhergehende (oder um drei, vier u. s. f.), so entsteht statt des Rhombendodekaëders ein Pyramidenwürfel. — Analog wie hier bewirkt Haüy in allen Fällen die Ableitung der Krystallformen auseinander durch Operationen mit parallelepipedischen Molekeln, deren reihenweises Weglassen er mit dem Namen *Dekrescenz* oder *Subtraktion* bezeichnet, und die daher selber *subtraktive Molekeln* genannt werden.

Indess muss man nicht meinen, dass Haüy in allen Fällen diese subtraktiven Molekeln für die wirklichen kleinsten Bausteine der Krystalle oder, wie er sich ausdrückt, für die *integrirenden Molekeln* gehalten hat, welche nicht weiter getheilt werden können, ohne bereits in die verschiedenen chemischen Atome zu zerfallen. Beim Kalkspath freilich und bei allen den Substanzen, die durch Spaltung nur in Parallelepipedern zerfallen, decken sich beide Begriffe. In andern Fällen aber verhält es sich anders. Beim Turmalin z. B., der parallel den Flächen eines Rhomboëders und zugleich, wenn auch undeutlicher, parallel denen einer sechsseitigen Säule Spaltbarkeit besitzt, zerfallen die Rhomboëder noch weiter in je 6, nicht reguläre, Tetraëder, indem nämlich jede der 6 Säulenflächen durch die Hauptaxe und je eine Randecke des Rhomboëders gelegt wird. Diese Tetraëder nimmt Haüy als die integrirenden Molekeln; sie befinden sich, wie man bemerkt, nicht sämmtlich in paralleler Lage. Aber als subtraktive Molekeln zur Ableitung der verschiedenen möglichen Formen dieser Krystallreihe dienen ihm auch hier die parallel nebeneinander befindlichen Rhomboëder.

Besondere Schwierigkeiten verursachten ihm Krystalle mit oktaëdrischer Spaltbarkeit (z. B. Flussspath). Denn bei solchen war es nicht mehr möglich, die integrierenden Molekeln *lückenlos* nebeneinander zu denken, wie in allen übrigen Fällen; sondern sie mussten hier entweder, wenn sie oktaëdrisch gestaltet angenommen wurden, mit tetraëdrischen Zwischenräumen aufgeschichtet gedacht werden, oder, bei tetraëdrischer Gestalt, mit oktaëdrischen Zwischenräumen. Indessen benutzte er als subtraktive Molekel auch hier ein Rhomboëder, das jedoch nicht homogen, sondern nur zum Theil massiv, zum Theil aber leer war, indem es nämlich aus einem Oktaëder mit je einem diesseits und jenseits angesetzten regulär-tetraëdrischen Hohlkörper, oder aus jenem hohl gedachten Oktaëder mit angesetzten massiven Tetraëdern bestand.

Besonders wichtig für unsere Betrachtung ist Haüy's ausdrückliche Erklärung,¹⁾ *die Dekrescenzen entstanden immer durch Reihen von Parallelepipeden, auch wenn die integrierenden Molekeln andere Gestalt besäßen*, und es sei für die Krystallographie von geringer Wichtigkeit zu wissen, ob die subtraktive Molekel (d. i. also die krystallographische Einheit) schon selbst integrierende Molekel oder noch aus anders geformten integrierenden Molekeln zusammengesetzt sei.²⁾

Gegen Haüy's Theorie lassen sich hauptsächlich drei Einwände erheben: *Erstens* erweist sie sich bei genauerer Betrachtung als willkürlich. Denn wenn sie auch, so lange sie auf Krystalle mit parallelepipedischer Spaltbarkeit angewandt wird, aus den Thatfachen abstrahirt erscheint, so ist dies doch nicht mehr der Fall bei der Anwendung auf solche Krystalle, welche entweder andere Spaltbarkeit besitzen, oder denen eine deutliche Spaltbarkeit überhaupt ab-

1) Vgl. z. B. Abriss der Theorie der Struktur der Krystalle. In Grens Journal d. Phys. Bd. 2. 1795. pag. 451 unten.

2) Während Haüy die polyedrische Gestalt der Molekeln ohne Weiteres annahm, glaubte J. J. Prechtl (Gehlens Journ. f. Phys., Chem. u. Min. VII. 1808: Theorie der Krystallisation) dieselbe dadurch erklären zu können, dass er sich die Molekeln der flüssigen Substanz im Momente der Krystallisation als weiche Kugeln dachte, die beim Zusammentritt durch die gegenseitige Pressung sich zu Würfeln u. s. w. umgestalteten.

geht. Namentlich in Bezug auf letztere herrscht grosse Unbestimmtheit und Willkür bei der Festsetzung der Gestalt der subtraktiven Molekel. — Weil nun der Theorie auch kein allgemeiner axiomartiger Satz zu Grunde liegt, der entweder selbstverständlich oder doch wegen seiner Einfachheit oder aus sonstigen Gründen plausibel wäre, so lässt sie sich von Willkür nicht frei sprechen. — Ein *zweiter* Vorwurf trifft den Begriff der subtraktiven Molekel. Dieselbe hat nämlich zwar eine bestimmte geometrische, aber keine konsequent festgehaltene physische Bedeutung; bald ist sie die wirkliche physische, bald nur eine zu Konstruktionen bequeme geometrische Einheit. — Auf eine andere Inkonsequenz bezieht sich der *dritte* Einwand. Wie erwähnt, müssen bei den oktaëdrisch spaltbaren Krystallen zwischen den integrierenden Molekeln leere Zwischenräume angenommen werden, was sonst bei keinem Krystall vorausgesetzt wird. Diese Eigenthümlichkeit des Baus verräth sich aber durch keine sonstige Eigenschaft; also ist sie überhaupt höchst unwahrscheinlich.

Von den beiden letztgenannten Mängeln befreite L. A. Seeber,¹⁾ Prof. der Physik zu Freiburg i. B., die Häüysche Theorie mittelst einer geringen Umgestaltung. Anstatt Häüys einander berührender Molekeln substituirt er nämlich in deren Mitte andere, die er so klein dachte, dass sie die zur Erklärung der Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit der festen Körper nothwendigen Abstände erhielten; ihre Gestalt nahm er kugelförmig an. Bei dieser Substitution bleibt die Häüysche Erklärung der Formen und der Spaltungsflächen der Krystalle im Wesentlichen bestehen, nur erfährt sie in manchen Fällen eine beträchtliche Vereinfachung. „Denn (l. c. pag. 244—245) substituirt man bei denjenigen Substanzen, wobei Häüy zur Erklärung der natürlichen Trennungsflächen *prismatische* und *tetraëdrische* molécules intégrantes annimmt, die neuen kleineren Atome nicht anstatt *dieser*, sondern anstatt der parallelepipedischen molécules soustractives, so lassen sich doch nach allen Richtungen der natürlichen Trennungsflächen Ebenen, welche kein Molekül schneiden, durch die von ihnen gebildeten Systeme legen, und mithin

1) Versuch einer Erklärung des innern Baus der festen Körper. In Gilberts Annalen d. Phys. 1824. Bd. 76. p. 229—248.

diese Flächen sich ebensogut erklären, als wenn man die neuen Atome anstatt der *molécules intégrantes* substituirt hätte. Man braucht daher den neuen sich nicht berührenden Atomen keineswegs die verschiedenen, zum Theil complicirten, Stellungsarten zu geben, die sie durch eine beständige Substitution anstatt seiner *molécules intégrantes* erhalten würden, sondern nur die *einzige* einfache, die sie dadurch erhalten, dass man sie in allen Fällen anstatt der *molécules soustractives* substituirt. Wir werden diese Stellungsart die *parallelepipedische* nennen.“

Unabhängig von Seeber, dessen Abhandlung wenig Beachtung gefunden zu haben scheint, gestaltete fast zwei Jahrzehnte später G. Delafosse,¹⁾ ein Schüler Haüy's, die Theorie in derselben Weise um. Indem er die Krystallmolekeln einfach als materielle Punkte ansah, d. h. indem er nur ihre Schwerpunkte in Betracht zog, und gleich Haüy von der fundamentalen Thatsache der Spaltbarkeit ausging, argumentirte er folgendermassen:

Wenn ein Krystall Spaltbarkeit parallel einer gewissen Ebene besitzt, so heisst das: es ist von jeder beliebigen Stelle aus möglich, eine Spaltungsebene parallel jener Ebene hervorzurufen. Daraus folgt, dass die Massenpunkte auf lauter Ebenen, parallel dieser Ebene, vertheilt sind, welche man natürlich in gleichen Abständen voneinander zu denken hat. — Wenn nun noch eine zweite Spaltbarkeit parallel einer anderen Ebene vorhanden ist, so schliesst man ebenso, dass die Massenpunkte auch auf dieser Schaar von parallelen Ebenen angeordnet sind; doch ist der Abstand je zweier Nachbar-ebenen dieser Schaar im Allgemeinen verschieden von dem Abstände der vorigen Schaar zu denken. Hiernach können die Massenpunkte nur längs geradliniger Reihen, parallel der Schnittlinie beider Spaltungsebenen, vertheilt sein. — Besitzt schliesslich der Krystall noch eine dritte Spaltbarkeit, so müssen die Massenpunkte auch noch auf äquidistanten Ebenen parallel dieser dritten Spaltungsebene angeordnet sein. Folglich sind die Massenpunkte in der Weise gleichförmig im

1) Recherches s. l. cristallisation considérée sous les rapports physiques et mathématiques. In den Mém. présentés par divers savants à l'académ. roy. d. scienc. de l'Inst. d. France. T. 8. Paris 1843. (Mém. des savants étrangers.)

Räume vertheilt, dass sie *in den Schnittpunkten dreier Züge von je parallelen äquidistanten Ebenen liegen, also ein räumliches Netz mit parallelepipedischen Maschen (ein Raumgitter) bilden*. Diese Anordnung macht dann auch das Vorhandensein noch anderer als der 3 zur Ableitung benutzten Spaltungsrichtungen verständlich. Indessen ist ersichtlich, dass diese Ableitung der Struktur ihren Dienst bei denjenigen Krystallen versagt, welche nicht nach 3 verschiedenen Ebenen spaltbar sind.

Bedenkt man, dass schon Häüy seine subtraktive Molekel wesentlich als geometrische Einheit, ohne Rücksicht auf ihre physische Beschaffenheit anwendet, und dass Delafosse und Seeber nichts anderes gethan haben, als die parallelepipedisch gestaltete subtraktive Molekel Häüys durch ihren Mittelpunkt, resp. durch eine kleine ihn umgebende Kugel zu ersetzen, so muss man anerkennen, dass die Häüysche Theorie hierdurch ganz im Geiste ihres Begründers fortgebildet worden ist und dabei wesentlich an Konsequenz und Einfachheit gewonnen hat.

Auf scheinbar anderem Wege wurde eine Umgestaltung der Häüyschen Theorie von Wollaston angebahnt und von Dana konsequent durchgeführt; doch ist das Resultat im Wesentlichen nicht verschieden von dem eben auseinandergesetzten. Will. Hyde Wollaston¹⁾ knüpfte an den dritten der erwähnten schwachen Punkte von Häüys Theorie an, wonach bei oktaëdrisch spaltbaren Krystallen die tetraëdrischen Molekeln mit oktaëdrischen Hohlräumen wechseln (oder umgekehrt). Er weist darauf hin, dass die Molekeln, welche sich hier nur mit den Kanten berühren, nicht in stabilem Gleichgewicht sein können. Daher setzt er bei diesen Krystallen die Elementartheilchen als gleiche Kugeln voraus, die durch gegenseitige Anziehung diejenige Anordnung angenommen haben, welche sie einander so nah als möglich bringt. Legt man auf 3 gleiche sich berührende Kugeln eine gleiche vierte, die vorigen berührend, so bestimmen die 4 Kugelcentra ein reguläres Tetraëder. Stellt man aber in einer Ebene 4 Kugeln zu einem Quadrat zusammen, und setzt dann mitten auf und

1) Phil. Transact. 1813. p. 51—63. On the elementary Particles of certain crystals.

mitten unter diese 4 je eine Kugel, so entsteht ein Oktaëder. Durch Zufügung je einer Kugel auf einem Paar entgegengesetzter Seiten dieses Oktaëders entsteht ein scharfes Rhomboëder. In der That ist der in dieser Weise weitergebaute Kugelhaufen völlig geeignet, die Struktur der oktaëdrisch spaltbaren Krystalle darzustellen. Wichtig ist Wollastons Bemerkung, man könne statt der Kugeln auch einfach mathematische Punkte annehmen, begabt mit ringsherum gleich wirkenden anziehenden und abstossenden Kräften, so dass ihre Ausdehnung nur virtuell kugelförmig sei; denn aus der Vereinigung solcher Theilchen gingen dieselben Formen hervor, wie aus denjenigen undurchdringlicher Kugeln. Wirklich bilden die Kugelcentra des obigen Kugelhaufens ein Raumgitter, das wir nachher als das oktaëdrische kennen lernen werden. — Wie Wollaston zunächst auf den alten Hooke'schen Gedanken der kugelförmigen Krystallelemente zurückgekommen war, den er freilich selbstständig von Neuem gefunden hatte, so gelangte er weiter auf die Huygen'ssche Vorstellung von dem Bestehn des Kalkspaths aus aneinanderliegenden flachen Rotationsellipsoiden. Sodann nahm er für die hexagonalen Prismen des Berylls und anderer Mineralien verlängerte Rotationsellipsoide als Elementartheile an. Zur Versinnlichung der Struktur kubisch spaltbarer Krystalle endlich dachte er sich 2 Arten gleich grosser Kugeln (z. B. schwarze und weisse) so gelagert, dass die abwechselnden Ecken eines Würfels von Kugeln erster Art, die zwischenliegenden Ecken von Kugeln der zweiten Art eingenommen werden; beide Kugelarten bilden dann 2 durcheinander gesteckte Tetraëder, entsprechend dem hemiëdrischen und pyroëlektrischen Verhalten mancher Würfelkrystalle.

Auch Dav. Brewster¹⁾ theilte die Ansicht von der sphäroidischen Gestalt der Elementartheilchen der Krystalle, ohne indessen diesen Gedanken specieller auszuführen. Denn er beabsichtigte nicht sowohl, die Struktur der verschiedenen Krystalle zu verfolgen, als vielmehr die Entstehung der Doppelbrechung der Krystalle aus dem gegenseitigen Druck der

1) Phil. Transact. for 1830. London. On the production of regular double refraction in the molecules of bodies by simple pressure, etc. p. 87—95.

Theilchen abzuleiten (und zwar nach Analogie der Beobachtung, dass ein Tropfen eines Wachs- und Harzgemisches, den man plattdrückt, völlig das Verhalten einer senkrecht zur optischen Axe geschnittenen, einaxigen positiven Krystallplatte zeigt).

Während Wollaston die Ersetzung von Häüys parallelepipedischer subtraktiver Molekel nur in einigen Fällen ausgeführt hatte, so verfolgte nach ihm James D. Dana¹⁾ denselben Weg weiter und ersetzte das Häüysche Parallelepiped in allen Fällen durch das in dasselbe eingeschriebene Ellipsoid. Dies geschieht so. Verbindet man die Mittelpunkte je zweier Gegenseiten eines Parallelepipedes durch eine Gerade, so halbiren sich diese 3 Geraden im Mittelpunkt, und jede durch je 2 von ihnen bestimmte Ebene ist parallel einem Paar Parallelepipedflächen. Diese Linien nun, als *konjugirte Durchmesser* eines Ellipsoids angesehen, bestimmen dasselbe völlig; es hat die Eigenschaft, die Parallelepipedflächen in ihren Mitten zu berühren, da ja die durch einen Endpunkt des einen von 3 konjugirten Durchmessern an das Ellipsoid gelegte Tangentialebene den beiden anderen Durchmessern parallel ist. Das so in das Parallelepiped eingeschriebene Ellipsoid betrachtet Dana als die subtraktive Molekel, die nun in der Häüyschen Art zur Ableitung der verschiedenen Gestalten einer Krystallreihe dient, und die jetzt gleichzeitig identisch mit der integrirenden Molekel ist. — Die konjugirten Durchmesser sind zugleich die krystallographischen Axen, und je nach ihrem Längenverhältniss und ihren Winkeln werden 8 Hauptformen der Molekel unterschieden.²⁾ Zur Erklärung der Aneinanderlagerung dieser Molekeln zu einem Krystall wird angenommen, die Anziehung einer Molekel sei am

1) Silliman American Journal. Ser. I. vol. 30. 1836. p. 275 u. 296: On the formation of Compound or Twin crystals. Ser. II. vol. 4. p. 364 (1847) und vol. 5. p. 100 (1848): On certain laws of Cohesiv Attraction (as illustrated by crystals). In den älteren Auflagen seines System of Mineralogy (z. B. in der dritten, 1850) finden sich seine Ansichten ebenfalls entwickelt; in den neueren nicht mehr.

2) 1) Alle 3 konjug. Durchmesser senkrecht (identisch mit den Ellipsoidhauptaxen).	{	Alle 3 gleich.	Würfel.
		Nur 2 gleich.	Grades quadratisches Prisma.
		Alle 3 ungleich.	Grades rektanguläres Prisma.

stärksten an den Enden der konjugirten Durchmesser; die Wirkung dieser Durchmesser sei polarisch, so dass die gleichnamigen Enden sich abstossen, die entgegengesetzten sich anziehen; jedoch sollen nur die homologen konjugirten Durchmesser aufeinander wirken. Diese Hypothesen drücken nichts anderes aus als den Satz: Bei der Krystallisation gruppirt jede Molekel 6 andere in paralleler Stellung um sich und wird von ihnen in den Endpunkten dreier konjugirten Durchmesser berührt. — Ebenso kann der Versuch zur Erklärung der Bildung von Sekundärflächen kaum für mehr als eine Umschreibung der Thatsachen gelten.

Eben dies gilt von einem auf derselben Vorstellung ellipsoidischer und polar wirkender Molekeln beruhenden Versuch Rob. T. Forsters,¹⁾ der die Häüysche reihenweise Dekrescenz durch das Unwirksamwerden der freien Pole bei den Molekeln der äussersten Reihen erklärte, ohne indessen für dieses Unwirksamwerden wirklich zwingende Gründe beizubringen.

Sieht man von Danas mechanischem Erklärungsversuch ab, und beachtet nicht sowohl die Gestalt der Molekel, deren Annahme als Ellipsoid doch sehr willkürlich ist, als vielmehr nur die gegenseitige Lage ihrer Centra, so findet man letztere mit der Lage der Massenpunkte in der Seeber-Delafose'schen Vorstellung identisch; denn dort wie hier sind es nur die Mittelpunkte von Häüys subtraktiven Molekeln, die allein in Betracht gezogen werden. — Somit führen alle von verschiedenen Seiten her unternommenen Fortbildungen der Häüyschen Theorie im Grunde zu demselben Ergebniss: *nämlich*

- | | | | |
|----|--|---|---|
| 2) | 1 Durchmesser senkrecht auf den 2 anderen, die einen schiefen Winkel einschliessen. (Ersterer ist eine Ellipsoidhauptaxe.) | { | Beide schiefen Durchmesser gleich. Grades rhombisches Prisma.
Beide schiefen Durchmesser ungleich. Grades rhomboidisches Prisma. |
| 3) | Alle 3 konjug. Durchmesser schiefwinklig. | { | Alle 3 gleich. Rhomboëder.
Nur 2 gleich. Schiefes rhombisches Prisma.
Alle 3 ungleich. Schiefes rhomboidisches Prisma. |

1) Phil. Magaz. 4 ser. vol. X. 1855. p. 108. On the molecular constitution of crystals.

zur parallelepipedischen Anordnung der Mittelpunkte der Krystallelemente.

Der nächste Schritt, der bei Annahme dieser verbesserten Häüyschen Theorie zu thun war, und der, schon vor Veröffentlichung von Danas und Delafosses erwähnten Abhandlungen, von M. L. Frankenheim gethan wurde, war die geometrische Untersuchung der verschiedenen möglichen Gattungen von Raumgittern, um festzustellen, ob dieselben mit den verschiedenen von der Natur dargebotenen Krystalltypen übereinstimmen. Frankenheim¹⁾ machte zunächst nur sein Resultat, ohne Andeutung eines Beweises, bekannt, weil er sich damals „mit der Annahme von Theilchen, die durch Zwischenräume getrennt sind, nicht befreunden konnte;“ es lautete dahin, dass es nur 15 verschiedene netzartige (d. h. raumgitterartige) Anordnungen von Theilchen geben könne, und dass dieselben mit den von Frankenheim aus dem äusseren Habitus und der Spaltbarkeit abstrahirten 15 Grundformen der Krystalle übereinstimmten. Dies Resultat ist indess nicht ganz richtig. Denn *es giebt*, wie später A. Bravais²⁾ in einer musterhaften geometrischen Untersuchung gezeigt hat, *nur 14 Hauptarten von Raumgittern, die sich in 7 durch ihre Symmetrie unterschiedene Abtheilungen bringen lassen.*³⁾

1) „Die Lehre von der Cohäsion.“ Breslau 1835. p. 311 u. 312. Sodann eingehender im „System der Crystalle“, in den Nova Acta Acad. Caesareae Leopoldino-Carolinae Naturae Curiosorum. 1842. T. 19. Abth. 2. p. 471—660.

2) Mém. s. l. syst. formés par d. points distribués régulièrement sur un plan ou dans l'espace, im Journal de l'école polytechn. T. 19. Paris 1850. p. 1—128. Dasselbe in dem Sammelwerk: Études crystallographiques. Paris 1866. 4^o.

3) Erst nach Bravais veröffentlichte Frankenheim auch seine Ableitung („Die Anordnung der Moleküle im Krystall.“ Poggend. Ann. d. Phys. 97. 1856. p. 337—382), bei der er nun ebenfalls nur 14 Anordnungen aufführt, „weil er es jetzt zweckmässiger finde, im monoklinischen System zwei der früher angenommenen Unterabtheilungen zusammenzufassen“. Bravais hatte aber in seiner Abhandlung (l. c. p. 97 Anmerk.) ausdrücklich darauf hingewiesen, dass jene beiden Frankenheimschen Anordnungsarten identisch seien. Frankenheims Ableitung ist übrigens nicht hinreichend streng, und steht an Klarheit und Anschaulichkeit der Bravais'schen nach. — Von einem rein mathematischen Gesichtspunkte aus haben sich mit den Raumgittern auch noch beschäftigt:

Zum Verständniss dieser Eintheilung der Raumgitter ist es nöthig, einige Bemerkungen vorzuschicken. Der Grad der Symmetrie eines Raumgitters lässt sich auf 2 Arten angeben: entweder durch Aufzählung seiner Symmetriemaxen (so verfährt Bravais), oder seiner Symmetrieebenen.¹⁾

Unter einer Symmetriemaxe versteht man eine solche Gerade, um welche man ein geometrisches Gebilde um einen gewissen Winkel drehen muss, wenn jeder vorher besetzt gewesene Punkt des Raums wieder mit einem Punkt des Gebildes besetzt sein soll. Die Axe heisst n -zählig (oder „von der Ordnungszahl n “, nach Bravais), wenn der kleinste, die Deckung herbeiführende, Winkel gleich dem n -ten Theil der vollen Umdrehung, d. h. $= \frac{2\pi}{n}$, ist.

Symmetrieebene ist eine Ebene, die ein geometrisches Gebilde so theilt, dass die eine Hälfte das Spiegelbild der anderen ist.

Nun lässt sich leicht beweisen, dass in einem Raumgitter das Vorhandensein einer geradzähligen Symmetriemaxe ($n = 2, 4, 6$), die Existenz von senkrecht zu ihr liegenden Symmetrieebenen nach sich zieht, und umgekehrt. Daher würde es genügen, entweder nur das Vorhandensein und die Zähligkeit (d. h. den Werth von n) von Symmetriemaxen, oder nur die Zahl und Lage der vorhandenen Symmetrieebenen als Eintheilungsgrund für die Raumgitter zu benutzen. Trotzdem füge ich, weil es nachher gebraucht wird, der Charakteristik durch Symmetriemaxen immer auch noch diejenige durch Symmetrieebenen [in Klammern] bei. — Weil immer nur von grenzenlos ausgedehnten Raumgittern die Rede ist, so wird unter *einer* Symmetriemaxe oder -Ebene immer eine Schaar unendlich vieler paralleler Axen oder Ebenen verstanden.

Zur Schilderung eines Raumgitters genügt die Angabe der Gestalt des kleinsten, durch 8 nächstbeisammenstehende

P. Lejeune-Dirichlet: Ueb. d. Reduktion der posit. quadr. Form u. s. f. in Crelle's Journal 40 p. 209 ff.; und Herr E. Selling: Des formes binaires et ternaires im Journ. de Math. 3 sér. t. 3. 1877. p. 21 ff.

1) So verfuhr ich bei einer etwas vereinfachten Ableitung der verschiedenen Gattungen von Raumgittern. Pogg. Ann. d. Phys. 132 p. 75. 1867 „Die Gruppierung der Moleküle in den Krystallen“.

Gitterpunkte bestimmten Parallelepipeds (Elementarparallelepipeds oder Kerns); doch empfiehlt es sich in einigen Fällen, der leichteren Anschaulichkeit wegen, die Raumgitterpunkte in anderer Weise in Gedanken zusammenzufassen. Alsdann wird (nach Bravais) unter einer *centrirten* Figur eine solche verstanden, deren Centrum mit einem Raumgitterpunkt besetzt ist.

Eintheilung der Raumgitter.¹⁾

I. Keine Symmetrieaxe. [Keine Symmetrieebene]: *Triklines Krystallsystem*.

1 Unterabtheilung: 1) Anordnung nach schiefwinkligen Parallelepipeden (ohne eine der bei den folgenden Gittern vorkommenden Besonderheiten).

II. Eine zweizählige Symmetrieaxe. [Senkrecht dazu 1 Symmetrieebene]: *Monoklines Krystallsystem*.

2 Unterabtheilungen: { 2) Anordnung nach klinorhombischen Säulen.
3) Anordnung nach geraden Parallelepipeden mit rhomboidischer Basis.

III. Drei aufeinander senkrechte zweizählige Symmetrieachsen. [3 aufeinander senkrechte Symmetrieebenen, gehend durch je 2 Axen]: *Rhombisches Krystallsystem*.

4 Unterabtheilungen: { 4) Anordnung nach geraden rhombischen Säulen.
5) Dieselbe mit centrirten Säulen.
6) Anordnung nach rechtwinkligen Parallelepipeden.
7) Dieselbe mit centrirten Parallelepipeden.

1) Ein Universalmodell der Raumgitter, welches durch Veränderung der Dimensionen und der Winkel alle 14 Hauptarten von Raumgittern zu veranschaulichen geeignet ist, ist vom Mechaniker Heckmann in Karlsruhe nach meinen Angaben konstruirt; es befindet sich im physikalischen Kabinet des Karlsruher Polytechnikums; eine Beschreibung desselben in Carls Repertorium für Experimentalphysik etc. Bd. XII; kürzer beschrieben im Bericht über die Ausstellung wissenschaftlicher Apparate im South Kensington Museum zu London 1876. Seite 942.

IV. Eine dreizählige Symmetrieaxe und senkrecht auf ihr 3 zweizählige. [3 Symmetrieebenen, senkrecht zu den zweizähligen Axen]: *Rhomboëdrisches Krystallsystem*.

1 Unterabtheilung: 8) Anordnung nach Rhomboëdern.

V. Eine vierzählige Symmetrieaxe und senkrecht auf ihr 4 zweizählige. [5 Symmetrieebenen, gehend durch je 2 Axen]: *Quadratisches Krystallsystem*.

2 Unterabtheilungen: $\left\{ \begin{array}{l} 9) \text{ Anordnung nach geraden quadra-} \\ \text{tischen Säulen.} \\ 10) \text{ Dieselbe mit centrirten Säulen.} \end{array} \right.$

VI. Eine sechszählige Symmetrieaxe und senkrecht auf ihr 6 zweizählige. [7 Symmetrieebenen, gehend durch je 2 Axen]: *Hexagonales Krystallsystem*.

1 Unterabtheilung: 11) Anordnung nach geraden regulär dreiseitigen Säulen.

VII. Drei vierzählige, vier dreizählige und sechs zweizählige Symmetrieaxen, bezüglich gerichtet wie eines Würfels Kanten, Diagonalen und Verbindungslinien der Mitten zweier gegenüberliegenden Kanten. [9 Symmetrieebenen, senkrecht zu den vierzähligen und zweizähligen Axen]: *Reguläres Krystallsystem*.

3 Unterabtheilungen: $\left\{ \begin{array}{l} 12) \text{ Anordnung nach Würfeln.} \\ 13) \text{ Anordnung nach centrirten Wür-} \\ \text{feln.} \\ 14) \text{ Anordnung nach Würfeln mit cen-} \\ \text{trirten Flächen.} \end{array} \right.$

N. B. Bei 13) ist das Elementarparallelepiped ein Rhomboëder, von dem 2 Nachbarflächen einen Winkel von 120° einschliessen; bei 14) ist es ein Rhomboëder, das aus einem Oktaëder mit 2, auf zwei Parallelfächen angesetzten, Tetraëdern besteht.

Es ist höchst bemerkenswerth, dass die Raumgitter genau in dieselben 7 Abtheilungen zerfallen, die man als Krystallsysteme aus der Erfahrung abstrahirt hat, so dass in vorstehender Tabelle einer jeden der 7 Raumgitterabtheilungen der Name des entsprechenden Krystallsystems beigesetzt werden konnte. Indessen darf man nicht übersehen, dass diese Uebereinstimmung doch keine ganz vollständige ist; sie findet nämlich nur zwischen den vollflächigen Krystallgestal-

ten und den Raumgittern Statt, während solche Symmetrieverhältnisse, wie sie den Halbflächnern eigenthümlich sind, bei den Raumgittern nicht vorkommen. Dies erhellt u. A. aus folgenden Beispielen:

Die Halbflächner des regulären Systems (Tetraëder, Pentagondodekaëder u. s. f.) besitzen keine vierzähligen Symmetrieachsen und auch nicht alle 9 Symmetrieebenen, wie die dem regulären Krystallsystem entsprechenden Raumgitter, sondern nur 4 dreizählige und 3 zweizählige Symmetrieachsen, gerichtet wie die Diagonalen und Kanten eines Würfels; Symmetrieebenen hat das Tetraëder 6, je eine gehend durch eine Kante; das Pentagondodekaëder aber nur 3 aufeinander senkrechte. — Das Tetraëder des quadratischen Systems hat keine vierzähligen Symmetrieachsen, sondern nur 3 aufeinander senkrechte zweizählige; ferner nur 2 Symmetrieebenen, je eine gehend durch eine der 2 gleichen Kanten, welche die Grundlinien der das Tetraëder begrenzenden gleichschenkligen Dreiecke bilden. — Das Tetraëder des rhombischen Systems hat gar keine Symmetrieebene, sondern nur 3 aufeinander senkrechte zweizählige Symmetrieachsen; u. s. f. — Statt aus dieser Nichtübereinstimmung der Symmetrieverhältnisse von halbflächigen Krystallen und Raumgittern den Schluss zu ziehn, dass die Struktur der Halbflächner keine raumgitterartige sein könne, führt Bravais,¹⁾ nach dem Vorgange von Delafosse,²⁾ eine Hülfshypothese ein, derzufolge der halbflächige Charakter schon den Molekeln innewohnen solle, deren Schwerpunkte aber nichtsdestoweniger nach Raumgittern, wie bei den vollflächigen Gestalten desselben Krystallsystems, angeordnet seien. So denkt sich z. B. Delafosse ein reguläres Tetraëder aus lauter kongruenten parallelen Tetraëderchen zusammengesetzt, deren Centra ein kubisches Raumgitter bilden.

Wenn nun diese Hülfshypothese auch nicht als unzulässig erklärt werden kann, so trägt sie doch jedenfalls nicht dazu bei, den Hauptvorwurf gegen die Haüy-Bravais'sche Theorie zu entkräften, nämlich den, dass es willkürlich sei, bei allen

1) Études cristallographiques im Journ. de l'école polytechn. T. 20. Paris 1851. Auch in dem gleichnamigen Sammelwerk Paris 1866.

2) Recherches s. l. cristallisation etc. in Mém. des savants étrangers. T. 8. Paris 1843.

*Krystallen ohne Ausnahme, — auch bei den nicht parallelepipedisch spaltbaren, und besonders bei den Halbflächnern, — die Struktur als raumgitterartig voranzusetzen. Warum sollte z. B. nicht eine derartige Anordnung der Molekelcentra in gewissen Krystallen möglich und sogar wahrscheinlich sein, bei der sie in einer Ebene die Ecken von lückenlos aneinanderliegenden regelmässigen Sechsecken, wie Bienenzellen, bilden?*¹⁾ Und doch ist eine solche Anordnung bei Annahme der Raumgitterstruktur ausgeschlossen!

Um dem Vorwurf der Willkür, der alle bisherigen Theorien der Krystallstruktur traf, zu entgehen, versuchte ich²⁾ 1867, aus einem an die Spitze gestellten, möglichst einfachen und selbstverständlichen Grundsatz alle überhaupt möglichen Strukturformen abzuleiten, nämlich aus dem *Grundsatz*, dass die *Punktvertheilung in einem unbegrenzt gedachten krystallinischen Punkthaufen um jeden Massenpunkt dieselbe ist, wie um jeden anderen*. Ich fand die Raumgitter als einzig mögliche Strukturformen für Krystalle, und dadurch schien die Häüy-Bravais'sche Theorie eine wesentliche Stütze erhalten zu haben. Indessen ist bei der Gewinnung dieses Resultats neben dem obigen Grundsatz noch eine zweite Voraussetzung unausgesprochen und gleichsam als selbstverständlich benutzt worden, nämlich die, dass *alle Molekeln einander parallel liegen*. Nur bei Annahme beider Voraussetzungen stellt sich die Raumgitterstruktur als einzig mögliche heraus (vgl. Cap. 4). Die zweite Voraussetzung ist aber keineswegs selbstverständlich und enthält eine grosse Beschränkung. Man übersieht z. B. unmittelbar, dass bei der oben erwähnten bienenzellenartigen Anordnung die einzelnen ein Sechseck bildenden Molekeln nicht in paralleler Lage befindlich sind.

Nun war schon 1863 (ohne dass es mir bekannt geworden war) von Herrn Chr. Wiener³⁾ dieselbe Aufgabe in Angriff genommen. Nach ihm „*findet Regelmässigkeit in der Anordnung gleicher Atome dann statt, wenn jedes Atom die anderen*

1) Vgl. z. B. Wittwer: Die Molekulargesetze. 1871. p. 108 u. 109, und Fig. 5 u. 6.

2) Die Gruppierung der Moleküle in den Krystallen. In Poggend. Ann. 132. p. 75. 1867.

3) Chr. Wiener: Grundzüge der Weltordnung. Leipzig u. Heidelberg 1863. Zweite Ausgabe 1869. Erster Band: Atomenlehre p. 82 ff.

in übereinstimmender Weise um sich gestellt hat, u. s. f.“ Indem nun Wiener die Nebenannahme der Parallellagerung der Atome nicht machte, gelang es ihm, aus seinem Grundsatz nicht die Raumgitter allein, sondern auch noch andere Strukturformen abzuleiten, *so dass hiermit der erste Fortschritt über die Bravais'sche Theorie hinaus gemacht war.* Bei Anordnung in einer Ebene ergab sich, dass entweder „die gleichlaufende Stellung die Bedingung für die regelmässige Anordnung ist, bei welcher alle Atome in übereinstimmender Weise den anderen gegenüberstehn (dies giebt ein parallelogrammatisches Netz), oder dass höchstens 2 umgekehrte Lagen möglich sind, wobei jedes System mit dem anderen gleich und gleichlaufend, aber gegen es verschoben ist“; (dies giebt 2 kongruente ineinandergestellte parallelogrammatische Netze, deren eines um 180° gegen das andere gedreht ist). Bei Aufsuchung regelmässiger Systeme im Raum ergeben sich zunächst die Raumgitter. Wollte man nun in einem aus Atomen aufgebauten Raumgitter innerhalb jedes Elementarparallelepipedes an entsprechende Stellen noch je ein neues Atom stellen, so würde die Regelmässigkeit verlangen, „dass die Punkte des neuen Atoms mit den übereinstimmenden Punkten eines jeden der 4 zunächststehenden Atome ebenmässig liegen in Bezug auf je einen Ebenmässigkeitspunkt, d. h. in gerade entgegengesetzter Richtung gleich weit von ihm entfernt. Dieses neue Atom ist aber dann mit den ersteren im Allgemeinen nicht zum Decken gleich, sondern nur spiegelbildlich gleich.“ Also ist diese Anordnung für lauter kongruente Atome im Allgemeinen nicht möglich. „Es giebt aber Fälle, in denen jene Ebenmässigkeit eines fünften Atoms gegen die 4 ersteren zugleich ein Decken in sich schliesst, nämlich dann, wenn die Formen nach verschiedenen Richtungen hin die gleiche Ausbildung haben, wie die Krystallformen der meisten Krystallsysteme. In diesem Falle ist noch ein fünftes Atom von ganz gleicher und ebenmässig zu den 4 ersten gestellter Form möglich; dasselbe erzeugt dann ein zweites, mit dem System der ersteren kongruentes und gleichlaufendes System, nur mit verschiedener Stellung der Atome.“ Z. B. entsteht durch senkrechte Aufschichtung von kongruenten ebenen Anordnungen der zweiten für die Ebene gefundenen Art eine solche neue räumliche Struktur-

form (nämlich das zweizählige Säulensystem des Capitel 5, § 14 Nr. 1). Ferner entsteht aus regulären Tetraëdern, deren jedes 4 kongruente Tetraëder, Fläche gegen Fläche, aber mit verschränkten Kanten, rings um sich stehn hat, eine regelmässige Anordnung (nämlich ein Specialfall des regulären Gegenschraubensystems zweiter Art. Vgl. Cap. 7, § 26, Nr. 5.).

So war die Möglichkeit noch anderer Strukturformen ausser den Raumgittern von Wiener nachgewiesen. Doch verfolgte er die regelmässigen Anordnungen nicht weiter, so dass mit den von ihm angeführten die Mannigfaltigkeit aller überhaupt möglichen noch keineswegs erschöpft ist. Somit erwuchs für die Theorie der Krystallstruktur die Aufgabe einer systematischen Aufsuchung aller überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Die Lösung dieser Aufgabe verdankt man Herrn Camille Jordan;¹⁾ sie findet sich eingeschlossen in der Lösung eines allgemeineren Problems aus der Geometrie der Bewegung. Im Eingange seiner Abhandlung spricht Jordan die von ihm zu behandelnde Aufgabe auf 2 Arten aus, nämlich:

- 1) Alle möglichen Bewegungsgruppen zu bilden.
- 2) Auf alle möglichen Arten Molekularsysteme zu bilden, die in verschiedenen Lagen mit sich selbst deckbar sind;

und er weist kurz nach, dass beide Fragen durch dieselbe Untersuchung ihre Beantwortung finden. Auch fügt er hinzu, dass von dem zweiten Gesichtspunkt aus Bravais die wichtigsten Specialfälle behandelt und davon eine bemerkenswerthe Anwendung auf die Krystallographie gemacht habe. Er selbst aber löst die Aufgabe als eine Bewegungsaufgabe, ohne die Resultate in die anschaulichere Ausdrucksweise der Geometrie zu übersetzen. Daher lässt seine Untersuchung keine unmittelbare Anwendung auf die Theorie der Krystallstruktur zu. Dazu kommt, dass von den 174 von ihm ermittelten Bewegungsgruppen, — wie mich 1875 eine genaue Durcharbeitung seiner Resultate gelehrt hat,²⁾ — mehr als 100 ohne

1) Mémoire sur les groupes de mouvements. In Brioschi e Cremona: Annali di Matematica. Ser. II. T. II. 1868/69 Milano. p. 167—215 und 322—345.

2) Die unbegrenzten regelm. Punktsysteme als Grundlage einer Theorie der Krystallstruktur. Karlsruhe. Braun. 1876. (Aus den Verh.

Beziehung zu der Theorie der Krystallstruktur sind, nämlich erstens die Gruppen mit unendlich kleinen Bewegungen, weil diese kontinuierlichen Raumgebilden und nicht Systemen diskreter Punkte entsprechen, und zweitens solche Gruppen, welche Punktsystemen entsprechen, die nicht nach allen 3 Dimensionen unendlich ausgedehnt sind. Endlich aber findet sich, abgesehen von kleineren Unrichtigkeiten, auch eine merkliche Lücke in der Jordan'schen Untersuchung. (Alle Systeme des § 20, Cap. 6 fehlen bei Jordan.) Diese zu entdecken war mir dadurch gelungen, dass ich früher, ohne seine Abhandlung zu kennen, die Aufsuchung aller regelmässigen unbegrenzten Punktsysteme in der Ebene nach einer völlig anderen Methode ausgeführt hatte,¹⁾ wobei sich gewisse Systeme herausstellten, welche, nebst ihren analogen im Raum, bei Jordan fehlen.

Mit Benutzung des Grundgedankens der Jordan'schen Methode, aber mit Weglassung alles dessen, was nicht direkten Bezug zur Krystallstruktur hat, sind nun im Folgenden alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung abgeleitet und somit alle denkbaren Strukturformen krystallisirter Körper ermittelt. Was diese Theorie der Krystallstruktur vor der Haüy-Bravais'schen voraus hat, lässt sich im Wesentlichen in folgende 4 Punkte zusammenfassen.

Erstens ist die Ausgangshypothese von der regelmässigen Anordnung der Krystallelemente so einfach und evident, dass sie wohl von keiner Seite einem Widerspruch begegnen wird. Damit ist der den bisherigen Theorien gemachte Hauptvorwurf der Willkür beseitigt.

Zweitens ergibt sich, dass sämtliche Punktsysteme, auf welche diese Hypothese führt, in Gruppen zusammenfassbar sind, die vermöge ihrer Symmetriecharaktere den von der Natur dargebotenen Gruppen der Krystallsysteme entsprechen; jedoch findet sich eine viel grössere Zahl von Punktsystemen als in der Bravais'schen Theorie, und sämtliche Strukturformen der letzteren, d. h. also sämtliche

des naturw. Vereins zu Karlsruhe. Heft 7. 1876.) Ein Auszug davon in Poggend. Ann. d. Phys. Ergbd. VII. p. 337.

1) Die regelm. ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. In Borchardts Journ. für Mathemat. Bd. 77. p. 47—101. 1873.

Raumgitter, sind als Specialfälle unter den neuen Punktsystemen mit enthalten.

Drittens ergeben sich zahlreiche Punktsysteme von dem geometrischen Charakter der halbflächigen Krystalle, so dass es nicht, wie bei Bravais, einer Hülfshypothese bedarf, um auch diese mit zu umfassen.

Viertens werden gewisse specielle geometrische und physikalische Erscheinungen, so namentlich *die Grenzformen* und das *optische Drehvermögen*, durch die neue Theorie dem Verständniss näher gebracht.

Capitel II.

Grundlegendes.

§ 3. Hypothese.

Es ist naturgemäss, einen Krystall in regelmässiger Weise aus lauter kongruenten Grundgebilden oder Krystallelementen aufgebaut zu denken, von denen es allerdings unentschieden bleiben muss, ob sie die aus Atomen zusammengesetzten chemischen Molekeln selbst, oder Aggregate von solchen sind. Ob diese Elemente durch Zwischenräume von einander getrennt sind und sich etwa um gewisse Mittellagen bewegen, oder ob sie stetig aneinandergelagert den Raum erfüllen, kann für die folgende Untersuchung unerörtert bleiben; denn von jedem Krystallelemente wird nur der Schwerpunkt in Betracht gezogen, in welchem man sich etwa die ganze Masse concentrirt denken mag. *Für die folgende geometrische Untersuchung ist also der Krystall durch ein System diskreter Massenpunkte ersetzt, in welchem es somit stets einen kleinsten Punktabstand giebt.*

Weil es sich ferner nur um die Ermittlung der Struktur handelt, so wird die Betrachtung der Grenzen ganz vermieden, und zwar dadurch, dass man den Krystall unendlich gross denkt (was sich übrigens wegen der Kleinheit der Molekularabstände gegenüber den endlichen Dimensionen des Krystalls auch sonst rechtfertigen lässt). — Mit Rücksicht auf die in § 1 auseinandergesetzten wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Krystalle („dass ihre Eigenschaften nur von der Richtung abhängen, und dass physikalisch ausgezeichnete

Punkte nicht vorhanden sind“), sowie mit Beachtung der eben vorausgeschickten Erwägungen, wird nun der ganzen Untersuchung folgende Hypothese über den krystallinen Zustand zu Grunde gelegt:

Hypothese:

Krystalle — unbegrenzt gedacht — sind regelmässige unendliche Punktsysteme, d. h. solche, bei denen um jeden Massenpunkt herum die Anordnung der übrigen dieselbe ist, wie um jeden anderen Massenpunkt.

Oder anders ausgedrückt: Ein Krystall ist ein endliches Stück eines unendlichen regelmässigen Punktsystems.

Zu Folge dieser Hypothese ist die Ermittlung aller für die Krystalle möglichen Strukturformen auf die Lösung folgender Aufgabe zurückgeführt:

„Alle überhaupt möglichen regelmässigen Punktsysteme von allseitig unendlicher Ausdehnung zu finden.“

Die Lösung dieser Aufgabe bildet den Inhalt der folgenden Capitel. Um zunächst den Begriff des regelmässigen unendlichen Punktsystems schärfer zu bestimmen, denke man in einer beliebigen unbegrenzten Anordnung von Punkten einen Punkt mit allen übrigen durch gerade Linien verbunden. In derselben Weise sei von jedem Punkt des Systems aus ein solches Linienbündel nach den anderen Punkten hin konstruirt; so werden diese Linienbündel im Allgemeinen von einander verschieden sein. Es sind aber Systeme denkbar, in denen die Punktvertheilung um jeden Punkt dieselbe ist wie um jeden anderen, so dass die von allen Punkten aus konstruirbaren Linienbündel untereinander kongruent sind. Hiernach hat man folgende *Erklärung*:

Ein regelmässiges Punktsystem ist ein solches, in welchem die von jedem Systempunkt nach allen übrigen Systempunkten gezogenen Linienbündel untereinander kongruent sind.

Man denke sich nun ein regelmässiges unendliches Punktsystem starr gemacht und aus seiner Lage herausgerückt; dann bilden die zuvor von Systempunkten besetzt gewesenen Orte des Raums ein dem System kongruentes Punktsystem; es möge, im Gegensatz zu dem herausgenommenen *beweglichen* System, das *feste* heissen. In welchen Systempunkt des festen Systems man nun einen beliebig gewählten System-

punkt des beweglichen auch legen mag: immer kann man in Folge der Kongruenz aller Linienbündel bewirken, dass beide Systeme zur Deckung gelangen. *Eine solche Bewegung nun, welche das bewegliche System aus einer Lage der Deckung mit dem festen in eine andere Lage der Deckung mit ihm überführt, soll eine Deckbewegung heissen.* Diese Bewegungen können theils Parallelverschiebungen, theils Drehungen oder Schraubungen um gewisse im festen System gegebene gerade Linien als Axen sein; und es wird ganz von der Eigenthümlichkeit des betreffenden Systems abhängen, welcherlei Deckbewegungen es besitzt. Ja man wird gerade nach den ihnen zukommenden Deckbewegungen verschiedene Gattungen von Punktsystemen unterscheiden können, so dass *die verschiedenen Arten von Deckbewegungen als Eintheilungsgrund für die regelmässigen Punktsysteme dienen.* Es stellt sich also heraus, dass die anzustellende Untersuchung in die Lehre von der Geometrie der Bewegung (oder Kinematik) gehört. Daher ist es nützlich, aus jener Lehre hier diejenigen Begriffe und Hauptsätze mit kurzer Andeutung der Beweise vorzuschicken, die im Folgenden zur Anwendung kommen.

§ 4. Kinematische Hilfsbetrachtungen, betreffend starre Systeme.

a) **Erklärungen:** Diejenige Lagenänderung eines Systems, bei welcher alle seine Punkte parallele Grade von derselben Länge l und in demselben Sinne durchlaufen, heisst eine *Parallelverschiebung oder Schiebung l (Translation).*

Diejenige Lagenänderung eines Systems, bei der alle Punkte einer gewissen Geraden A ihren Ort beibehalten, alle übrigen aber Kreisbogen mit dem Centriwinkel α um jene Gerade als Axe beschreiben, heisst eine *Drehung A_α (Rotation).* Es werden immer nur Drehungen betrachtet werden, die 180° nicht überschreiten; nämlich eine Drehung $> 180^\circ$ kann stets durch eine Drehung entgegengesetzten Sinnes ersetzt werden, welche die vorige zu einer vollen Umdrehung ergänzt.

Diejenige Lagenänderung eines Systems, bei welcher alle Punkte eine gleichgrosse und gleichsinnige Drehung α um eine und dieselbe Axe A , und ausserdem eine und dieselbe Schiebung l parallel dieser Axe erleiden, heisst eine

der Drehwinkel $= \alpha$ ist. — Entsprechend ist der Beweis bei umgekehrter Reihenfolge der 2 gegebenen Bewegungen.

Zusatz 1. Ist statt der Drehung A_α eine Schraubung $A_{\alpha, l}$ gegeben, so gilt der entsprechende Satz; denn durch das Hinzutreten der Schiebungskomponente l wird an dem Beweise sonst nichts geändert.

Zusatz 2. Ist statt der zur Axe senkrechten Schiebung s eine geneigte gegeben, so ersetzt man sie nach I. durch 2 Schiebungen, resp. senkrecht und parallel zur Axe. Für die senkrechte gilt dann Satz II. Schliesslich ist noch die der Axe parallele Schiebung auszuführen, so dass die äquivalente Bewegung eine Schraubung ist.

III. (Eulerscher Satz.) Zwei nacheinander auszuführende Drehungen A_α und B_β um 2 sich schneidende feste Axen des Raums sind zusammen äquivalent einer Drehung C_γ um eine durch denselben Punkt gehende dritte Axe. Um letztere zu finden, beschreibe man mit beliebigem Radius eine Kugel um den Schnittpunkt O der gegebenen Axen. Von den 2 Schnittpunkten einer jeden Axe mit der Kugelfläche kommt nur je einer, den man beliebig wählen kann, in Betracht. Nun zieht man auf der Kugelfläche 2 grösste Kreise, indem man erstens im Schnittpunkt A der ersten Axe ihren halben Drehwinkel, $\frac{\alpha}{2}$, an den durch beide Axen gehenden grössten Kreis anträgt, — und zwar auf derjenigen Seite dieses Kreises, von welcher her die Drehung erfolgt, — und zweitens im Schnittpunkt B der zweiten Axe den dieser zugehörigen halben Drehwinkel, $\frac{\beta}{2}$, jedoch auf der Seite jenes Kreises, nach welcher hin die Drehung erfolgt: dann bestimmen die Schnitte C dieser 2 grössten Kreise die Lage der gesuchten Axe, und der bei C befindliche Aussenwinkel des sphärischen Dreiecks ABC ist ihr halber Drehungswinkel. (Fig. 2.)

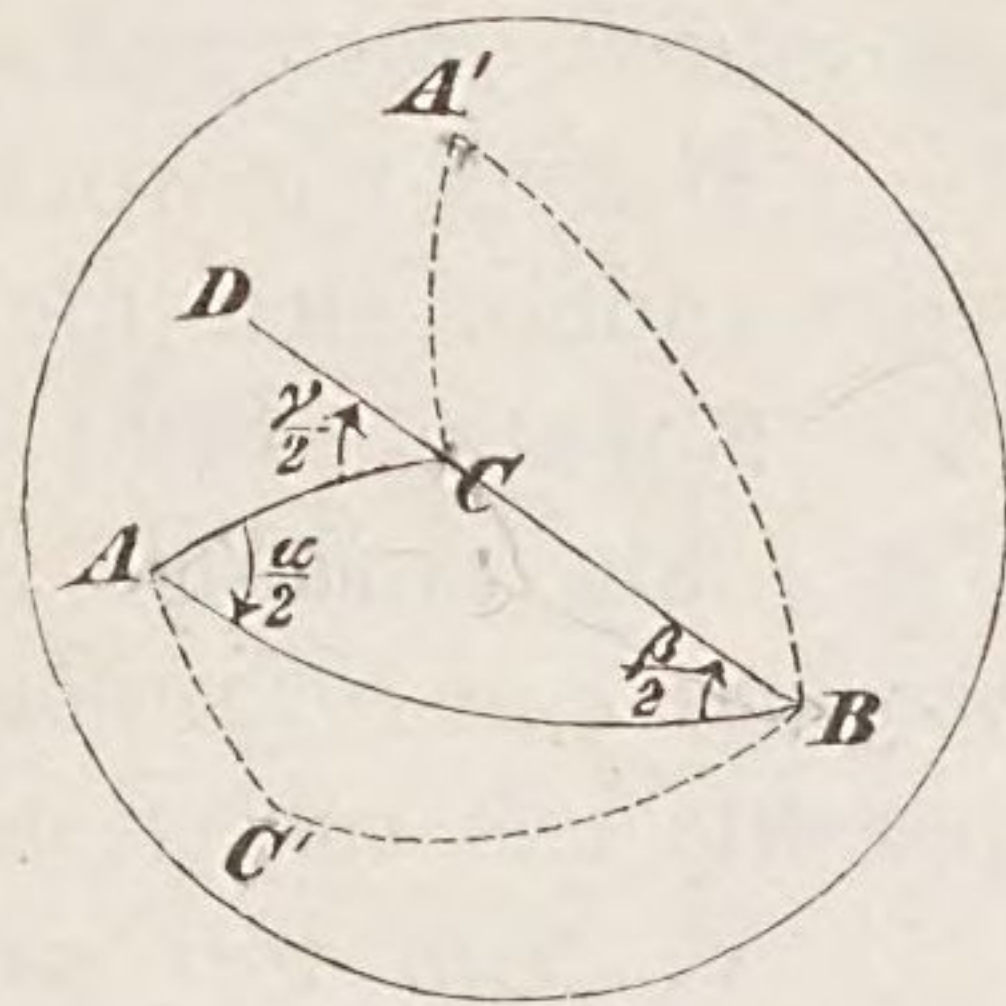


Fig. 2.

Beweis. Durch Drehung A_α wird diejenige Gerade c des beweglichen Systems, die Anfangs in OC lag, in die Lage OC' gebracht, so dass die Dreiecke $AC'B$ und ACB zueinander symmetrisch sind in Bezug auf AB . Die darauf

folgende Drehung B_β führt c wieder in die Lage OC zurück. Weil also nach Ausführung beider Bewegungen alle Punkte der Geraden c ihre ursprünglichen Orte im Raum, nämlich in OC , behalten haben, so sind jene 2 Drehungen A_α und B_β äquivalent einer Drehung um OC . Der Drehwinkel γ ergibt sich so: Diejenige Gerade a des beweglichen Systems, die Anfangs in OA lag, ist durch die Drehung A_α unverändert geblieben, darauf aber durch die Drehung B_β in die Lage OA' gelangt, so dass die Dreiecke ABC und $A'BC$ zueinander symmetrisch sind in Bezug auf BC . Also muss die äquivalente Drehung um OC ebenfalls die Gerade a aus der Lage OA in die Lage OA' befördern; also ist um OC um den $\sphericalangle \gamma = ACA'$ zu drehen. Derselbe wird, in Folge der Symmetrie der eben genannten Dreiecke, durch den Bogen BCD halbirt. Hiermit ist die Eulersche Konstruktion bewiesen.

IV. *Zwei nacheinander auszuführende gleichsinnige Drehungen A_α und B_β um 2 parallele feste Axen des Raums sind zusammen äquivalent einer Drehung C_γ desselben Sinnes um eine parallele Axe, deren Lage und Drehwinkel wie beim vorigen Satze gefunden werden, nur dass die Konstruktion auf einer unendlich grossen Kugel, d. h. auf der Ebene ausgeführt wird.*

Beweis wie vorher; die grössten Kreise der vorigen Figur verwandeln sich hier in gerade Linien.

Zusatz. *Sind statt der Drehungen Schraubungen $A_{\alpha,l}$, $B_{\beta,m}$ um parallele Axen gegeben, so ist die äquivalente Bewegung eine Schraubung $C_{\gamma,l+m}$, deren Axe und Drehungskomponente wie vorher gefunden werden.*

V. *Ein nur um einen festen Punkt O drehbares starres System kann aus einer gegebenen Lage in jede andere mögliche Lage durch eine Drehung um eine gewisse Axe übergeführt werden. Um letztere zu finden, beschreibe man mit beliebigem Radius eine Kugel um den festen Punkt O . Zwei auf dieser Kugelfläche liegende, sonst beliebig gewählte Punkte des Systems nehmen bei seiner ersten Lage gewisse Orte des Raums ein, A und B ; bei irgend einer zweiten Lage des Systems aber die Orte A' und B' . Verbindet man nun die alte und neue Lage des ersten Systempunkts durch einen grössten Kreisbogen AA' , und ebenso die des zweiten, BB' , und legt durch die Mitten, a und b , dieser Bögen, senkrecht zu letzteren, zwei grösste Kreise,*

so giebt ihr Schnitt C die Lage der gesuchten Drehaxe. (Fig. 3.)

Beweis. Durch Verbindung von C mit A, B, A', B' vermittelst grösster Kreise entstehen die kongruenten sphärischen Dreiecke CAB und $CA'B'$. Aus der hieraus folgenden Gleichheit der Winkel ACB und $A'CB'$, verbunden mit der identischen Gleichung $BCA' = BCA'$ (oder $ACB' = ACB'$), folgt, dass $\sphericalangle ACA' = BCB'$ ist. Dreht man also das System um die Axe OC um diesen Winkel, so kommen die ursprünglich in A und B befindlich gewesenen Punkte des Systems nach A' resp. B' , und folglich ist durch diese Drehung das ganze System aus der ersten in die zweite Lage übergeführt.

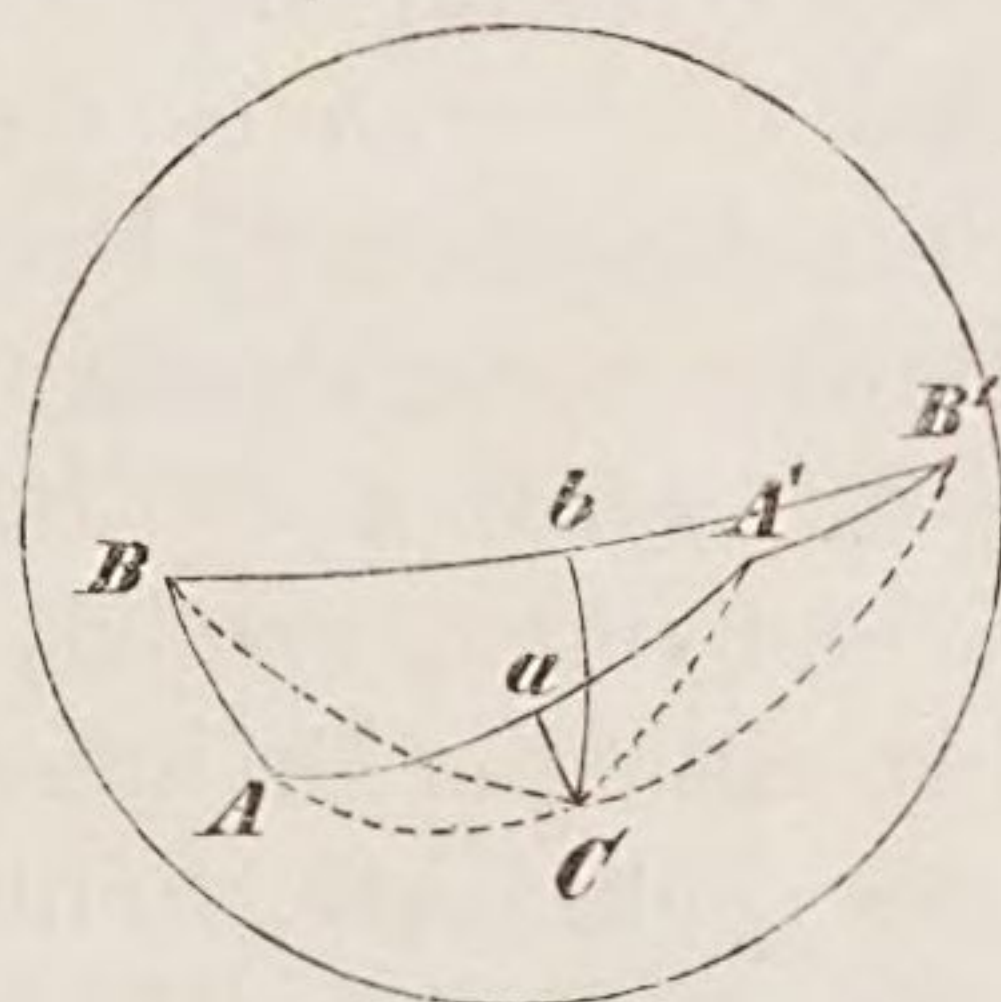


Fig. 3.

Zusatz. Die angegebene Konstruktion wird vereitelt, wenn die beiden grössten Kreise, deren Schnitt die Axe OC bestimmen soll, sich gar nicht schneiden, sondern zusammenfallen. Dies kann nur eintreten, wenn entweder die Bögen AB und $A'B'$ selbst (Fig. 4), oder ihre Ergänzungen zum Vollkreis (Fig. 5), sich so schneiden, dass die durch den

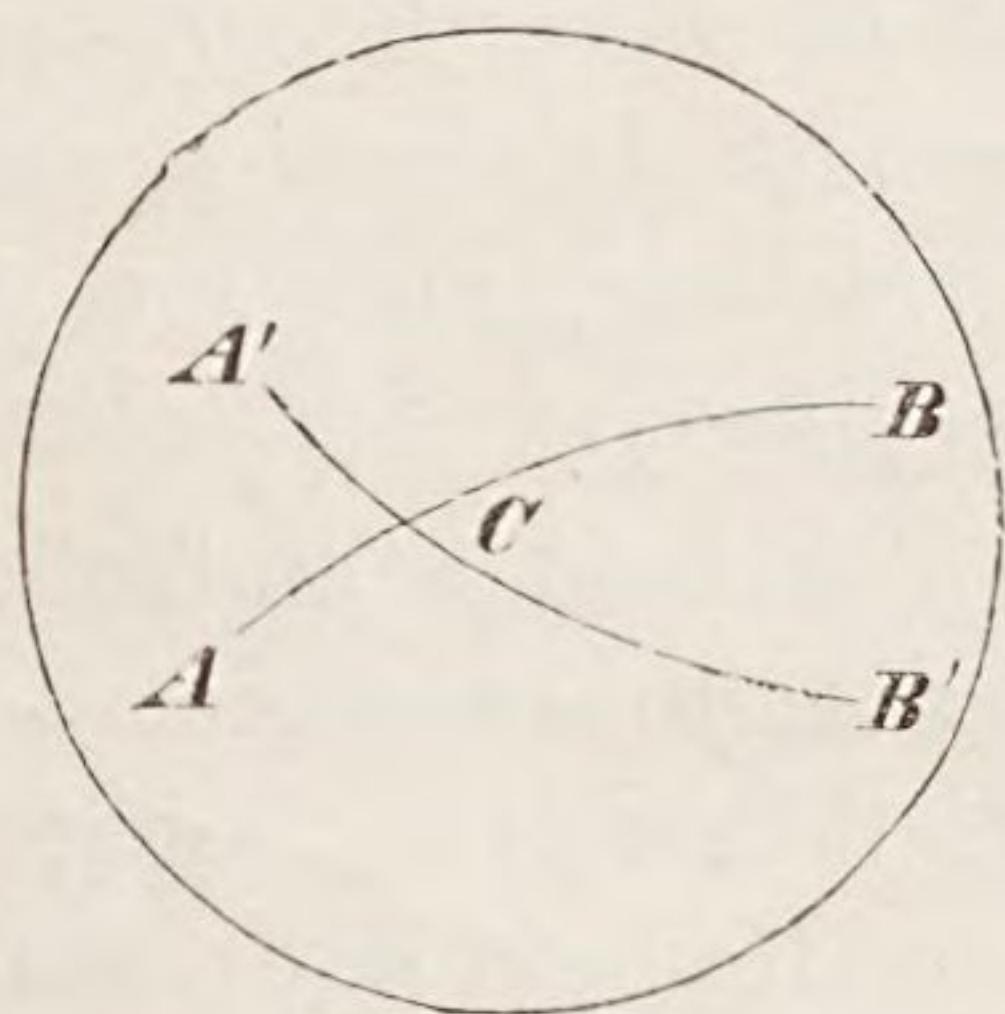


Fig. 4.

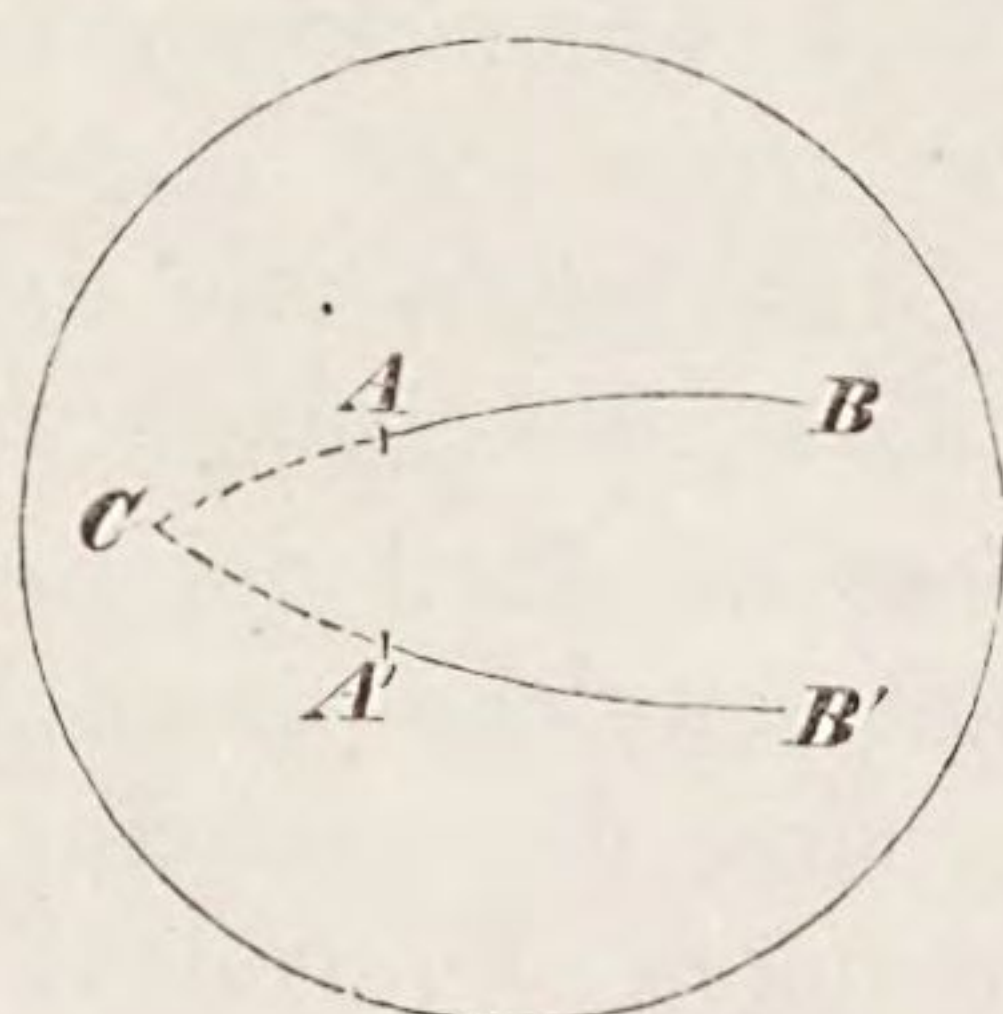


Fig. 5.

Schnittpunkt bestimmten Stücke des einen Bogens kongruent sind den entsprechenden Stücken des anderen. In diesen Fällen sieht man aber unmittelbar, dass dieser Schnittpunkt C selbst die Lage der gesuchten Axe angiebt.

VI. (*Châsles'scher Satz.*) Ein starres System kann aus jeder gegebenen Anfangslage in jede beliebige Endlage durch eine Schraubung übergeführt werden.

Beweis. Bezeichnen P und P' diejenigen 2 Orte des

Raums, welche ein und derselbe beliebig gewählte Systempunkt in der Anfangs- und Endlage des Systems einnimmt, so lässt sich die Ueberführung des Systems so bewirken, dass man ihm erst die Schiebung PP' ertheilt, wodurch dieser Systempunkt schon seinen schliesslichen Ort erreicht, und dass man es dann noch eine einzige, nach dem vorigen Satz bestimmte, Drehung um P' machen lässt. Statt dieser Bewegungen wende man nun aber folgende an: Die Schiebung PP' wird nach Satz I. durch 2 aufeinander senkrechte Schiebungen ersetzt, deren eine parallel der Axe der nachher nöthigen Drehung gewählt wird. Die andere, zur Drehungsaxe senkrechte, Schiebung und die darauf folgende Drehung sind nach Satz II zusammen äquivalent einer gleichen und gleichsinnigen Drehung um eine gewisse, zur vorigen parallele Axe. Also sind im Ganzen nur 2 einfache Bewegungen zur Ueberführung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage nöthig: eine Schiebung parallel einer gewissen Axe, und eine Drehung um diese Axe. Sie bilden zusammen die behauptete Schraubung.

VII. *Zwei nacheinander auszuführende Schraubungen $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$ um 2 im Raum feste, nicht parallele Axen sind äquivalent einer einzigen Schraubung, deren Drehungskomponente und Axenrichtung (aber nicht absolute Lage) dieselben sind, als wenn statt der Schraubungen 2 Drehungen mit denselben Drehwinkeln und um ebenso gerichtete, aber sich schneidende Axen nacheinander hätten ausgeführt werden sollen.*

Beweis. Weil die Reihenfolge der beiden einfachen Bewegungen, welche eine Schraubung zusammensetzen, beliebig ist, so sind die nacheinander auszuführenden 2 gegebenen Schraubungen äquivalent folgender Reihenfolge von Bewegungen:

$$l, A_{\alpha}, B_{\beta}, m.$$

Die Drehung B_{β} ist nach Satz II äquivalent der gleichen und gleichsinnigen Drehung um eine zu B parallele Axe B' (die man so wählt, dass sie A schneidet), verbunden mit einer darauf folgenden, zur Axe B' senkrechten, Schiebung n . Die 2 Drehungen A_{α} und B'_{β} um die sich schneidenden Axen setzen sich nach Satz III zu einer Drehung C_{γ} um eine bestimmte neue Axe C zusammen. [Von dieser Drehung C_{γ}

wird behauptet, dass die resultirende Schraubung mit ihr die Axenrichtung und den Drehwinkel gemein habe.] Die Schiebungen n und m setzen sich nach Satz I zu einer Schiebung l' zusammen. Mit den 2 gegebenen Schraubungen sind also nun folgende Bewegungen äquivalent:

$$l, C_\gamma, l';$$

oder, wenn man jede der 2 Schiebungen l und l' nach Satz I in 2 Komponenten zerlegt, eine (λ resp. λ') parallel zur Axe C , die andere (σ resp. σ') senkrecht dazu, so hat man folgende Reihe von Bewegungen:

$$\lambda, \sigma, C_\gamma, \sigma', \lambda'.$$

Nun sind aber σ und C_γ zusammen äquivalent einer Drehung C'_γ um eine zu C parallele Axe C' (Satz II), und nach demselben Satze sind C'_γ und σ' zusammen äquivalent einer Drehung C''_γ um eine ebenfalls zu C parallele Axe C'' . Folglich ist mit den 2 gegebenen Schraubungen äquivalent folgende Reihe von Bewegungen:

$$\lambda, C''_\gamma, \lambda'.$$

Da nun die Schiebungen λ und λ' beide parallel der Axe C'' sind, um welche die Drehung γ auszuführen ist, so ist das Gesamtergebniss eine Schraubung mit der Drehungskomponente γ um Axe C'' , deren Richtung mit der von C übereinstimmt; und das war zu beweisen.

VIII. Wenn die nacheinander auszuführenden Bewegungen $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$ zusammen äquivalent sind mit $C_{\gamma, n}$, so ist die umgekehrte Bewegung $C_{-\gamma, -n}$ äquivalent mit den in umgekehrter Reihenfolge auszuführenden umgekehrten beiden anderen Bewegungen, d. h. mit $B_{-\beta, -m}$, $A_{-\alpha, -l}$.

Beweis selbstverständlich.

IX. Wenn von 3 Bewegungen, von welchen die eine $C_{\gamma, n}$ den beiden anderen, $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$, zusammen äquivalent ist, zwei zu den Deckbewegungen eines unendlichen regelmässigen Punktsystems gehören, so ist auch die dritte eine Deckbewegung des Systems.

Beweis. Als Deckbewegungen des Punktsystems können gegeben sein entweder $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$, oder $A_{\alpha, l}$ und $C_{\gamma, n}$, oder $B_{\beta, m}$ und $C_{\gamma, n}$. — Im ersten Fall herrscht nach Ausführung der beiden Bewegungen $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$ wieder Deckung

des beweglichen und festen Systems (vergl. Seite 28), folglich ist auch die jenen beiden Bewegungen zusammen äquivalente Bewegung $C_{\gamma, n}$ eine Deckbewegung des Systems. — Im *zweiten* Fall herrscht nach Ausführung der Bewegung $C_{\gamma, n}$ Deckung. Statt dieser einen Deckbewegung wende man nun die ihr äquivalenten Bewegungen $A_{\alpha, l}$ und $B_{\beta, m}$ nacheinander an. Nach Ausführung von $A_{\alpha, l}$ herrscht nach Voraussetzung Deckung. Führt man darauf die Bewegung $B_{\beta, m}$ aus, so muss wieder Deckung herrschen, weil jetzt dieselbe Lage herbeigeführt ist, wie durch die eine Bewegung $C_{\gamma, n}$, welche ja eine Deckbewegung ist. Also ist auch $B_{\beta, m}$ eine solche. — Im *dritten* Fall herrscht nach Ausführung der Bewegung $C_{\gamma, n}$ Deckung, folglich auch nach Ausführung der entgegengesetzten $C_{-\gamma, -n}$. Statt letzterer Bewegung wende man nacheinander die Bewegungen $B_{-\beta, -m}$, $A_{-\alpha, -l}$ an, die mit $C_{-\gamma, -n}$ äquivalent sind (Satz VIII). Nach Ausführung von $B_{-\beta, -m}$ herrscht nach Voraussetzung Deckung. Führt man dann noch die Bewegung $A_{-\alpha, -l}$ aus, so muss wieder Deckung herrschen, weil jetzt dasselbe erreicht ist, wie bei Ausführung der einen Bewegung $C_{-\gamma, -n}$. Also ist $A_{-\alpha, -l}$ eine Deckbewegung; also auch $A_{\alpha, l}$.

Capitel III.

Die verschiedenen möglichen Arten und Richtungen von Axen in regelmässigen unendlichen Punktsystemen.

§ 5. Die verschiedenen möglichen Axenarten.

Erklärung. Unter einer „Axe eines regelmässigen unendlichen Punktsystems“ oder „Axe“ schlechweg wird die Axe einer Deckbewegung (Schraubung oder Drehung) des Systems verstanden. Im Allgemeinen bedeutet sie also die Axe einer Schraubung $A_{\alpha, l}$, deren Schiebungs-komponente l aber auch $= 0$ sein kann.

Alle regelmässigen unendlichen Punktsysteme zerfallen in solche mit Axen und in solche ohne Axen; auf letztere wird erst im Abschnitt II, Cap. IV, eingegangen; zunächst werden nur Punktsysteme mit Axen untersucht.

Erklärung. *Zwei Axen eines Systems heissen gleich, wenn die Anordnung der Systempunkte um die eine von ihnen dieselbe ist, wie um die andere. Alsdann muss sich die eine Axe, zum beweglichen System gehörig gedacht, mit der anderen zum festen System gehörig gedachten Axe zur Deckung bringen lassen, so dass zugleich alle Punkte des beweglichen und festen Systems sich decken.*

Satz 1. *Wenn ein regelmässiges unendliches Punktsystem überhaupt eine Axe besitzt, so besitzt es zugleich unendlich viele ihr gleiche Axen.*

Dies folgt unmittelbar aus der Regelmässigkeit und Unendlichkeit des Systems.

Satz 2. *Unter den gleichen Axen giebt es entweder parallele, oder solche, deren Richtungen einen unendlich kleinen Winkel einschliessen (d. h. wie klein man sich auch den Winkel von 2 Axen von dieser Art denken mag: immer giebt es 2 ihnen gleiche Axen, deren Richtungen einen noch kleineren Winkel einschliessen).*

Beweis. Es sind nur 2 Fälle denkbar: entweder verlaufen die gleichen Axen nach einer endlichen Anzahl von Richtungen, oder nach einer unendlichen. Im ersteren Falle müssen jedenfalls parallele gleiche Axen vorhanden sein, denn sonst könnte die Anzahl aller gleichen nicht unendlich gross sein (Satz 1). Im anderen Falle müssen sicher gleiche Axen von unendlich wenig verschiedener Richtung vorkommen; denn sonst könnte die Zahl der Richtungen von solchen Axen nicht unendlich gross sein.

Satz 3. *Zwei gleiche parallele oder unendlich wenig verschieden gerichtete Axen (A' , A'') können nicht einen unendlich kleinen Abstand haben (oder sich sogar schneiden).*

Beweis. Angenommen die beiden gleichen Axen von unendlich wenig verschiedener oder sogar gleicher Richtung hätten einen unendlich kleinen Abstand (oder schnitten sich sogar). Dann wird irgend ein Systempunkt m durch die Bewegung $A'_{\alpha, \iota}$ nach m' , dagegen durch die Bewegung $A''_{\alpha, \iota}$ nach m'' versetzt. Also müssen m' und m'' Punkte des festen Systems sein, denn jene Bewegungen sind ja Deckbewegungen; und wegen der über A' und A'' gemachten Voraussetzungen muss der Abstand $\overline{m'm''}$ unendlich klein sein; folglich wäre

er kleiner als der für das System angebbare kleinste Punkt-
abstand (vgl. Seite 27), der ja von bestimmter endlicher
Grösse ist. Also ist die angenommene Lage der beiden Axen
unmöglich, und daher der Satz bewiesen.

Satz 4. *Axen mit unendlich kleinem Drehwinkel α sind
unmöglich.*

Beweis. Unter allen gleichen Axen wähle man zwei
solche aus ($A_{\alpha, l}$ und $A'_{\alpha, l}$), deren Richtungen entweder gar
nicht oder unendlich wenig verschieden sind, was nach Satz 2
stets möglich ist. Durch die Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, l}$
gelangt die Axe A' in eine neue Lage A'' , die folglich auch
eine gleiche Axe des festen Systems ist. Wäre nun α ein
unendlich kleiner Winkel, so würden A' und A'' zwei Axen
von unendlich wenig oder gar nicht verschiedener Richtung
sein, die einen unendlich kleinen Abstand hätten (oder sich
schnitten). Dies ist nach Satz 3 unmöglich, also der Satz
bewiesen.

Anmerkung. Nur im Falle einer unendlich grossen Schie-
bungskomponente l würden A' und A'' keinen unendlich
kleinen Abstand zu haben brauchen. Dieser Fall ist aber
ausgeschlossen; denn eine Schraubung mit unendlich grosser
Schiebungskomponente ist gar keine *bestimmte* und *wirklich*
ausführbare Bewegung; daher hätte es keinen Sinn, eine
solche Bewegung als eine ein Punktsystem charakterisirende
Deckbewegung zulassen zu wollen.

Satz 5. *Gleiche Axen, deren Richtungen einen unendlich
kleinen (jedoch von 0 verschiedenen) Winkel einschliessen, sind
unmöglich (Fig. 6).*

Beweis. Zunächst seien A und A' zwei *parallele* gleiche
Axen. Die Figur ist in einer zu ihnen senkrechten Ebene
zu denken, deren Schnittpunkte mit den Axen durch dieselben
Buchstaben wie die Axen bezeichnet sind. Die Bewegung
 $A_{\alpha, l}$ führt A' in die Lage a' , und die Linien $\overrightarrow{AA'}$ der Zeich-
nungsebene in eine zu $\overrightarrow{Aa'}$ parallele Lage. Dagegen wird
aus derselben Anfangslage durch die Bewegung $A'_{\alpha, l}$ die Axe
 A in die Lage a geführt, und die Linie $\overrightarrow{AA'}$ in eine zu $\overrightarrow{aA'}$
parallele Lage, welche gleichfalls zu $\overrightarrow{Aa'}$ parallel ist. Die
beiden, durch die erste und die zweite Bewegung erreich-

baren, Endlagen des Systems sind einander parallel, weil die Lagen, in welche die Axe A und die Linie $\overrightarrow{AA'}$ durch die erstere Bewegung gelangen, gleichsinnig parallel sind den Lagen, in die sie durch die zweite gelangen. Folglich kann das System aus der einen Endlage in die andere durch eine einfache Schiebung übergeführt werden. Diese ist daher eine Deckbewegung für das Punktsystem.

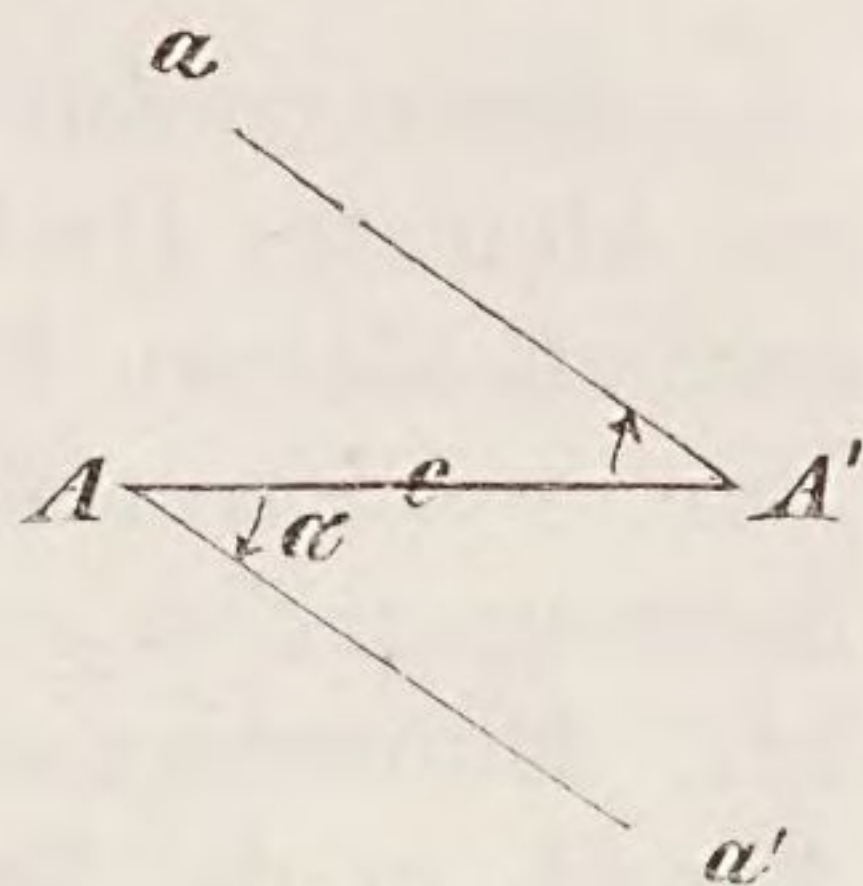


Fig. 6.

Jetzt seien aber die beiden gleichen Axen A und A' unendlich wenig verschieden gerichtet; ihr kürzester Abstand sei e . Dann kommt das System durch Ausführung der einen, resp. anderen der Bewegungen $A_{\alpha, l}$ und $A'_{\alpha', l}$ in zwei nicht mehr völlig parallele Lagen, indem sowohl die Axenrichtungen A und a , als die Richtungen der Linien, in welche der kleinste Abstand e geführt wird, unendlich wenig von einander abweichen. Jetzt kann also das System aus der einen Endlage in die andere nicht mehr durch eine Schiebung übergeführt werden; vielmehr ist dazu nach Hülfsatz VI eine Schraubung erforderlich. Dieselbe kann aber nur eine unendlich kleine Drehungskomponente haben, weil die Drehung, die das System in der einen Lage erleiden müsste, um der anderen völlig parallel zu werden, nur unendlich klein ist, und weil diese Drehung mit der Drehungskomponente jener Schraubung übereinstimmt, wie aus dem Beweise von Hülfsatz VI hervorgeht. Hiernach wäre also eine Schraubung mit unendlich kleiner Drehungskomponente eine Deckbewegung des Systems. Das ist aber nach Satz 4 unmöglich; also können gleiche Axen von unendlich wenig verschiedener Richtung nicht vorkommen.

Satz 6. *Unter den gleichen Axen giebt es nothwendig parallele.*

Beweis. Nach Satz 2 giebt es unter den gleichen Axen entweder parallele, oder solche, deren Richtungen einen unendlich kleinen Winkel einschliessen. Weil nun der letztere Fall in Satz 5 als unmöglich nachgewiesen ist, bleibt nur der erstere übrig.

Satz 7. *Der kleinste zu einer Axe gehörige Drehwinkel α ist ein aliquoter Theil der vollen Umdrehung, d. h.:*

$$\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad (n = \text{ganze Zahl}) \quad (\text{Fig. 7}).$$

Beweis. Zunächst ist klar, dass überhaupt für jede Axe ein kleinster Drehwinkel α angebbar ist, denn Axen mit unendlich kleinen Drehwinkeln sind nach Satz 4 unmöglich. — Nun werden unter allen gleichen Axen irgend 2 parallele herausgegriffen, A und A' , was nach Satz 6 stets möglich ist. Einmalige Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, l}$ bringt die Axe A' in die Lage A'' , so dass in der auf den Axen senkrechten Zeichnungsebene $\sphericalangle A''AA' = \alpha$. In A'' muss sich also eine gleiche Axe des festen Systems befinden. Durch nochmalige Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, l}$ geht aus A'' eine gleiche Axe A''' hervor, die in dem festen System vorhanden sein muss; u. s. f. Durch hinreichend häufige ($n-1$ malige) Wiederholung dieser Bewegung ergibt sich schliesslich die Existenz einer Axe $A^{(n)}$, die so liegt, dass sie durch noch-

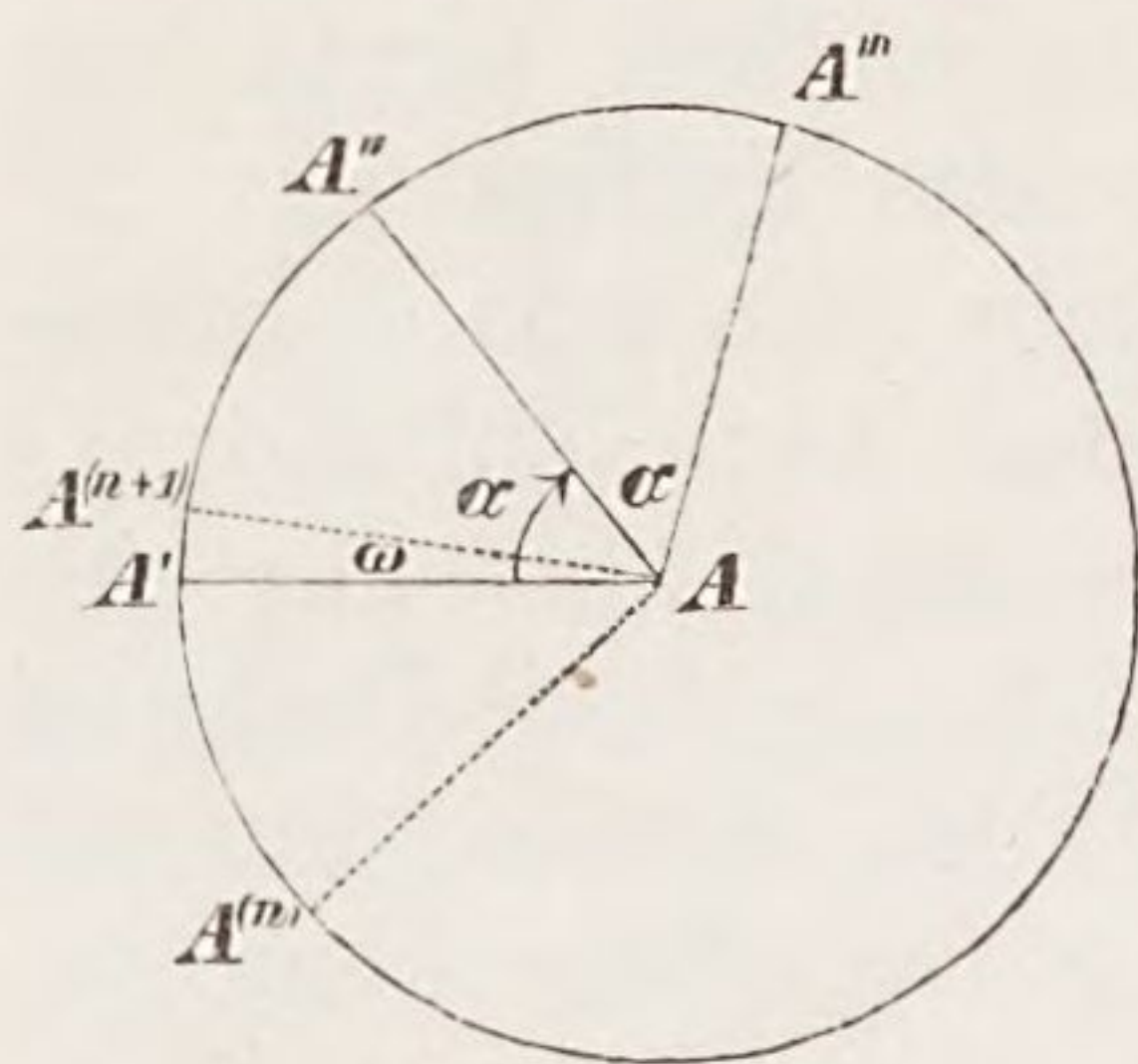


Fig. 7.

malige Bewegung $A_{\alpha, l}$ in die Gerade geführt wird, in der von vornherein A' lag, so dass also $\sphericalangle A^{(n)}AA' = \alpha$. Wäre nämlich $\sphericalangle A^{(n)}AA' > \alpha$, so hätte man nur noch nicht oft genug die Bewegung $A_{\alpha, l}$ ausgeführt. Wäre aber $\sphericalangle A^{(n)}AA' < \alpha$, so würde eine nochmalige Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, l}$ die Existenz einer Axe $A^{(n+1)}$ liefern, welche zwischen A' und A'' hineinfiel, so dass $\sphericalangle A^{(n+1)}AA' (= \omega) < \alpha$ wäre. Dann wäre also $A_{2\pi + \omega, nl}$ oder, was damit identisch ist, $A_{\omega, nl}$ eine Deckbewegung des Systems, wo $\omega < \alpha$. Somit wäre nicht α , sondern ω , der kleinste zu A gehörige Drehwinkel, und das ist gegen die Voraussetzung. Folglich ist

$$n\alpha = 2\pi \quad (n = \text{ganze Zahl}).$$

Erklärung. Eine Axe, deren kleinster zugehöriger Drehwinkel $= \frac{2\pi}{n}$ ist, heisse n -zählig. (Führt z. B. keine kleinere Drehung, als die um 1 R $\sphericalangle$, Deckung des beweglichen und festen Systems herbei, so ist die zugehörige Axe vierzählig.)

Erklärung. Charakteristische Deckbewegung um eine n -zählige Axe ist diejenige Deckschraubung, deren Drehungskompo-

nente $= \frac{2\pi}{n}$, und deren Schiebungscomponente gleich der kleinsten unter allen Schiebungen ist, die, mit jener Drehung verknüpft, Deckung herbeiführen.

Satz 8. Die ganze Zahl n , welche eine n -zählige Axe charakterisirt, kann nicht grösser als 6 sein (Fig. 8).

Beweis. Unter allen gleichen parallelen Axen seien A und A' zwei solche, dass kein anderes Paar derselben Art einen geringeren Abstand habe als dieses; er heisse a . Durch Ausführung der Bewegung $A_{\alpha, l}$ wird A' nach A'' versetzt, wo also eine gleiche Axe des festen Systems liegen muss. Wenn $n = 6$ ist, so ist der Abstand dieser 2 Axen $\overline{A'A''} = a$; wenn aber $n > 6$, also $\alpha < 60^\circ$ wäre, so würde der Abstand $\overline{A'A''} < a$ sein, während doch a als kleinster vorausgesetzt war. Also kann n höchstens $= 6$ sein.

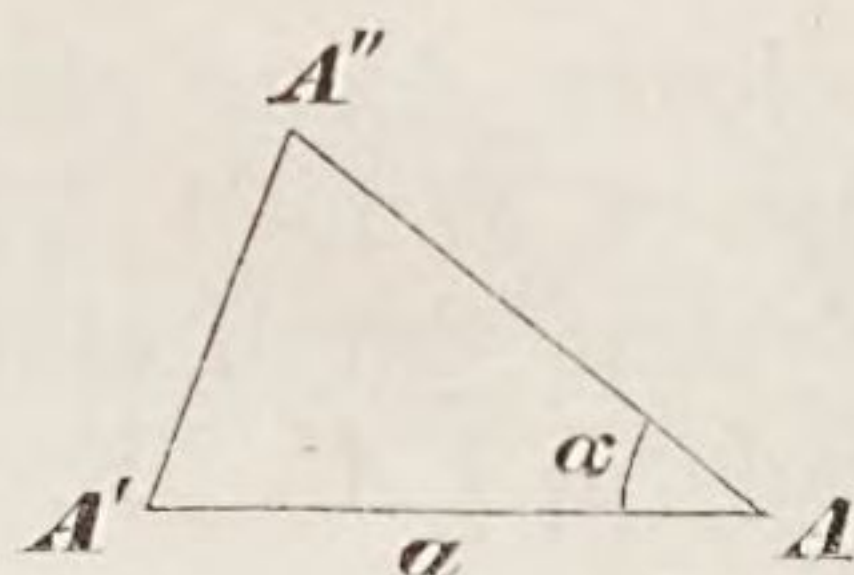


Fig. 8.

Satz 9. Fünfzählige Axen sind unmöglich (Fig. 9).

Beweis. Angenommen es gäbe 5-zählige Axen, so muss es darunter parallele geben; unter letzteren seien A und A' 2 nächstbenachbarte. Einmalige Bewegung $A_{\frac{2\pi}{5}, l}$ bringt A'

in die Lage A'' , wo also eine gleiche Axe des festen Systems liegen muss. Einmalige Bewegung $A_{\frac{2\pi}{5}, l}$

bringt A in die Lage A''' , wo also ebenfalls eine gleiche Axe des festen Systems liegen muss. Letztere Axe liegt aber an A' näher als A , und das ist unmöglich, weil A und A' zwei nächste sein sollten. Also sind 5-zählige Axen unmöglich.

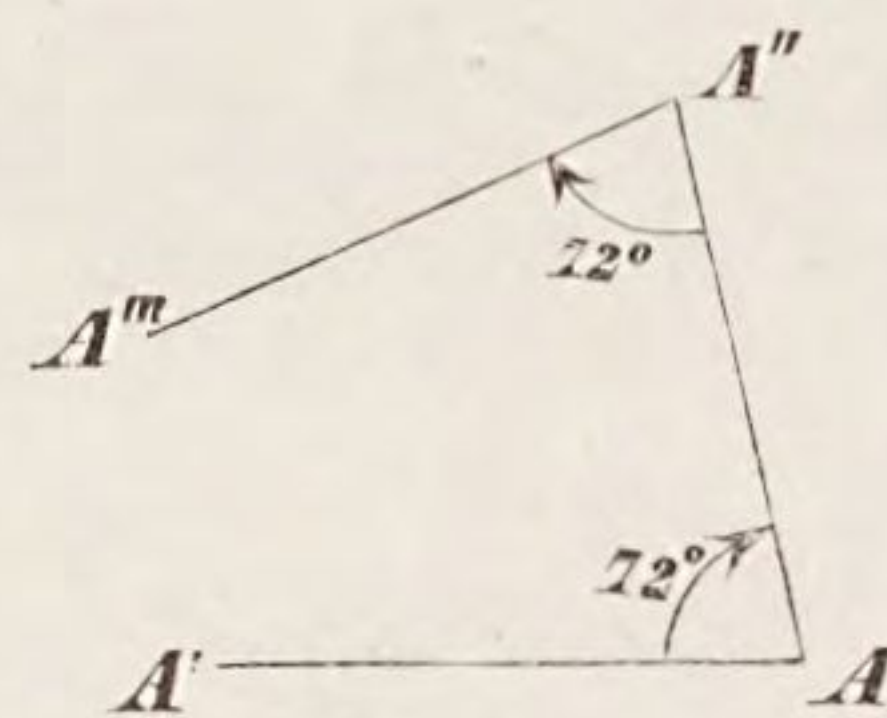


Fig. 9.

Satz 10. Es giebt nur 2-, 3-, 4- und 6-zählige Axen.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den 3 vorhergehenden Sätzen, indem die Annahme eines dieser Werthe für n nicht auf irgend welchen Widerspruch führt.

§ 6. Die verschiedenen möglichen Richtungen von gleichen Axen.

Von regelmässigen unendlichen Punktsystemen mit n -zähligen Axen sind 2 Hauptarten denkbar:

1) Solche, bei denen die gleichen n -zähligen Axen nur nach *einer* Richtung verlaufen.

2) Solche, bei denen sie nach mehreren Richtungen verlaufen. Nur von den letzteren wird in diesem § gehandelt.

Satz 11. *Aus dem Vorhandensein von 2 gleichen n -zähligen Axen von verschiedener Richtung folgt das Vorhandensein von p solchen Axen, gerichtet wie die Kugelradien nach den Ecken eines (nicht sternförmigen) regulären sphärischen p -ecks (Fig. 10).*

Beweis. Unter allen gleichen n -zähligen Axen des Systems seien A' , A'' 2 derartige, dass kein anderes Paar solcher Axen einen kleineren Winkel bestimme als jene; dieser Winkel heiße σ . Man ziehe nun im beweglichen System durch einen beliebigen Punkt der Axe A'' eine Gerade $a_1 \parallel A'$. Eine n -zählige Drehung um A'' bringt a_1 in die neue Lage a_3 ; parallel hiermit ist jene Lage, in welche die Axe A' des beweglichen Systems geführt ist. Wenn die A Schraubenaxen sind, so ist nun noch die zugehörige Schiebung l längs A'' auszuführen, wodurch natürlich die *Richtung* von a_3 nicht geändert wird. a_3 giebt also die *Richtung* derjenigen Axe an, welche aus A' hervorgeht durch Ausführung der Deckbewegung um A'' , und welche demnach eine Axe des festen Systems sein muss; sie heiße A''' .

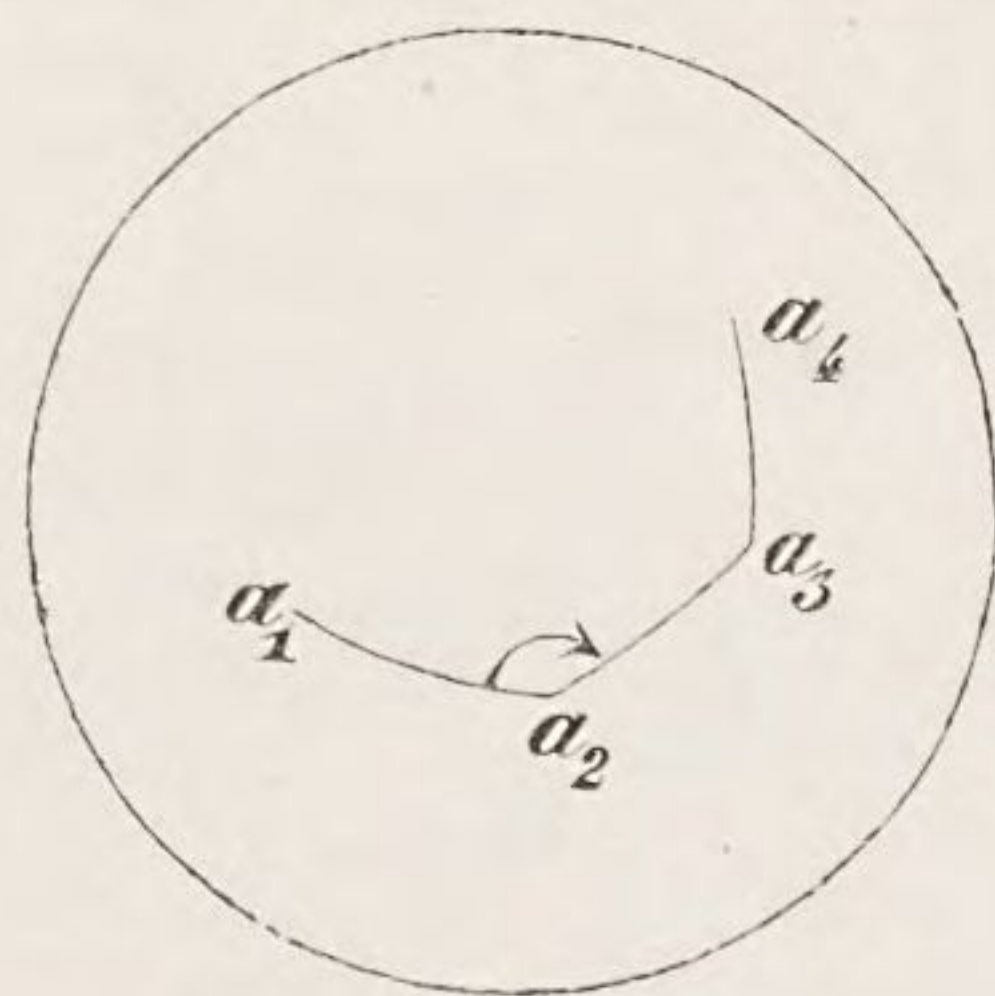


Fig. 10.

Jetzt lege man durch einen festen Punkt O eines anderen Raumes Parallelen mit den eben behandelten Axenrichtungen a_1 , a_2 (identisch mit A_2) und a_3 , und konstruiere mit beliebigem Radius eine Hülfskugel um O , welche von jenen durch O gelegten Axenrichtungen in den gleichnamigen Punkten a_1 , a_2 , a_3 geschnitten werde. Dann ist auf der Kugel

$$\text{Bogen } \widehat{a_1 a_2} = \widehat{a_2 a_3} = \sigma, \text{ und}$$

$$\angle a_1 a_2 a_3 = \frac{2\pi}{n}.$$

Ebenso wie durch Ausführung der Deckbewegung um A'' die Axe A''' aus A' hervorging, leitet man nun durch Ausführung der Deckbewegung um A''' eine neue Axe A^{IV} aus A'' ab; ihre Richtung ist dadurch bestimmt, dass die $\parallel$

zu ihr durch O gelegte Gerade die Hülfskugel in einem Punkt a_4 treffen muss, der so liegt, dass $\widehat{a_3 a_4} = \sigma$ und $\angle a_2 a_3 a_4 = \frac{2\pi}{n}$ ist. — So fortfahrend findet man lauter Axenrichtungen, die in dem Punktsystem vorkommen müssen. Dadurch erhält man auf der Hülfskugel ein reguläres sphärisches Vieleck, welches sich unmittelbar schliessen muss und nicht sternförmig sein kann, weil im letzteren Falle zwei Richtungen a vorkommen würden, die einen kleineren Winkel als σ bildeten, was gegen die Voraussetzung ist. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Satz 12. *Als solche reguläre sphärische Vielecke, durch welche nach dem vorigen Satz die verschiedenen Richtungen gleicher n -zähliger Axen bestimmt werden, treten nur einige, ganz bestimmte, auf. Welche es sind, ergibt sich im Verlauf des Beweises.*

Beweis. Der Flächeninhalt eines sphärischen p -ecks mit den (in Graden gemessenen) Winkeln $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ist bekanntlich

$$= \left\{ \alpha + \beta + \gamma + \dots - (p - 2) \cdot 180^\circ \right\} \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{180^\circ},$$

wo r den Kugelradius bedeutet. — Beim *regulären* sphärischen p -eck ist die Summe aller Winkel $= p \cdot \alpha$, wenn α der Polygonwinkel ist; als Winkel einer n -zähligen Axe ist dieser, in Graden gemessen, $= \frac{360^\circ}{n}$. Also ist der Flächeninhalt des *regulären* sphärischen p -ecks

$$\begin{aligned} F_p &= \left\{ p \cdot \frac{360}{n} - (p - 2) \cdot 180 \right\} \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{180} \\ &= \left\{ 2n - p(n - 2) \right\} \cdot \frac{r^2 \cdot \pi}{n} \\ &= \varphi \cdot \frac{K}{4n}, \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung $2n - p(n - 2) = \varphi$, und der Inhalt der Kugelfläche $4r^2\pi = K$ gesetzt ist. Aus der Ueberlegung, dass der Flächeninhalt F_p nothwendig positiv sein muss, ergibt sich eine Bedingung für die allein möglichen Werthe von p ; nämlich es muss $\varphi = 2n - p(n - 2) > 0$ sein.

Indem man nun für n nacheinander die nach Satz 10 allein möglichen Werthe 6, 4, 3, 2 einsetzt, und jedesmal

ermittelt, welche ganzzahligen Werthe von p den Ausdruck $\varphi > 0$ machen, findet man die Eckenzahlen p der allein hier auftretenden Vielecke. Dabei ist der Werth $p = 1$ ausgeschlossen, weil ein Eineck sinnlos ist. Und ausserdem ist zu bemerken, dass für $p = 2$ φ unabhängig von n , nämlich $= 4$, also $F_2 = \frac{K}{n}$ wird. Demnach ist für Axen von jeder Zähligkeit (n) das Verlaufen nach 2 entgegengesetzten Richtungen, nämlich nach den Ecken des sphärischen Zweiecks ($p = 2$), möglich.

a) Für $n = 6$ wird $\varphi = 4 \cdot (3 - p)$. Es giebt nur den einzigen Werth $p = 2$, der $\varphi > 0$ macht; also ist nur das (reguläre) sphärische Zweieck möglich; sein Flächeninhalt ist $F_2 = \frac{K}{6}$. „Sechszählige gleiche Axen von verschiedener Richtung können nur nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen.“

b) Für $n = 4$ wird $\varphi = 2 \cdot (4 - p)$; dies wird positiv für $p = 2$ und für $p = 3$. Im ersteren Falle wird $F_2 = \frac{K}{4}$; im letzteren $F_3 = \frac{K}{8}$; dies ist also dasjenige reguläre sphärische Dreieck, welches das reguläre Oktaeder bestimmt. Also: „Vierzählige gleiche Axen von verschiedener Richtung können entweder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, oder parallel den Kugelradien nach den Ecken des regulären sphärischen Dreiecks, welches das Oktaeder bestimmt.“

c) Für $n = 3$ wird $\varphi = 6 - p$; dies wird positiv für $p = 2, 3, 4, 5$. Die Flächeninhalte dieser Polygone sind bezüglich $F_2 = \frac{K}{3}$, $F_3 = \frac{K}{4}$, $F_4 = \frac{K}{6}$, $F_5 = \frac{K}{12}$. Also: „Dreizählige gleiche Axen von verschiedener Richtung verlaufen entweder nach 2 entgegengesetzten Richtungen, oder parallel den Kugelradien nach den Ecken eines gewissen regulären sphärischen Dreiecks oder Vierecks oder Fünfecks, welche bezüglich das reguläre Tetraeder, Hexaeder, Dodekaeder bestimmen.“

d) Für $n = 2$ wird $\varphi = 4$, also unabhängig von p , und F_p wird $= \frac{K}{2}$. Die Seitenzahl p des Polygons bleibt hier also zunächst unbestimmt; aber aus dem Flächeninhalt des Polygons erkennt man, dass alle seine Ecken in ein und denselben grössten Kreis fallen. Also: „Zweizählige gleiche

Axen von verschiedener Richtung verlaufen entweder nach 2 entgegengesetzten Richtungen oder parallel den Radien nach den Ecken eines regulären ebenen Polygons, dessen Eckenzahl vorläufig noch unbestimmt bleibt.“

Satz 13. *Aus dem Vorhandensein von 2 gleichen 4-zähligen, oder 2 gleichen 3-zähligen Axen von verschiedener, jedoch nicht entgegengesetzter, Richtung folgt das Vorhandensein von noch mehreren gleichen Axen parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Polyeders. Letzteres ist für die 4-zähligen Axen ein Oktaëder, für die 3-zähligen ein Tetraëder oder Würfel oder Dodekaëder (doch wird das Dodekaëder später — Satz 19 — ausgeschlossen).*

Beweis. Es seien A' , A'' zwei gleiche, n -zählige Axen von der Art, dass kein anderes Paar solcher Axen einen kleineren Winkel als sie einschliesse; er heiße σ . Weil die Axen nicht entgegengesetzt gerichtet sein sollen, so ist sicher $\sigma < 180^\circ$. Dann ist in Satz 11 bewiesen, dass noch mehrere ihnen gleiche Axen A''' , A^{IV} , ... $A^{(p)}$ vorhanden sein müssen, parallel den Kugelradien nach den Ecken eines regulären sphärischen p -ecks, das, wegen $\sigma < 180^\circ$, kein Zweieck sein kann. Durch irgend einen Punkt einer dieser Axen (A') legt man im beweglichen System Parallelen zu den anderen genannten Axen und führt nun die Deckbewegung um A' aus. Diejenigen Linien, in welche hierdurch die gezogenen Parallelen versetzt werden, sind dann parallel zu den Lagen, in welche die anderen Axen A'' , A''' , ... geführt sind, und welche, — weil es eine Deckbewegung war, — Axen des festen Systems sein müssen. Zieht man, wie bei Satz 11, durch einen festen Punkt O eines anderen Raums Parallelen zu den Axenrichtungen A' , A'' , ... $A^{(p)}$, so bestimmen ihre Schnittpunkte $a_1, a_2, \dots, a_p$ mit der um O konstruirten Hilfskugel das reguläre sphärische p -eck des Satzes 11. Eine n -zählige Drehung der Kugel um die Linie Oa_1 führt nun das sphärische p -eck in eine neue Lage des Raums, in welcher es mit einer Seite an der früheren anliegt; die Radien nach den Ecken dieses neuen Polygons sind parallel den oben ermittelten neuen Axenrichtungen, die in dem Punktsystem nothwendig vorkommen müssen. Durch n -zählige Drehung der Kugel um irgend einen Radius, der einer der bisher konstruirten Axenrichtungen parallel ist, werden die

bisher vorhandenen sphärischen p -ecke in neue Lagen geführt, und wieder müssen die Radien nach ihren Ecken $\parallel$ zu n -zähligen gleichen Axen des Systems sein. Führt man so fort, so gelangt man doch nur zu einer beschränkten Zahl von Axenrichtungen, denn alle hier auftretenden sphärischen Polygone haben die Eigenschaft, durch wiederholte Aneinanderfügung die Kugelfläche grade lückenlos zu schliessen. Nämlich nach Satz 12 hat das sphärische Dreieck, welches bei 4-zähligen Axen auftritt, die Grösse $\frac{K}{8}$; es führt also zum Oktaeder; das sphärische Dreieck, Viereck, Fünfeck, welche bei 3-zähligen Axen auftreten, sind bezüglich $= \frac{K}{4}, \frac{K}{6}, \frac{K}{12}$, führen also zum Tetraeder, Würfel und Dodekaeder; und das war zu beweisen. —

Zusammenfassung der Ergebnisse von Satz 11 bis 13. Gleiche Axen *von jeder Zähligkeit* (n) können nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Für *sechszählige* gleiche Axen sind dies die einzig möglichen verschiedenen Richtungen. *Vierzählige* gleiche Axen können ausserdem noch parallel den Radien nach den Ecken eines Oktaeders verlaufen. *Dreizählige* gleiche Axen können noch parallel den Radien nach den Ecken eines Tetraeders oder eines Würfels oder eines Dodekaeders verlaufen; doch wird das Dodekaeder später (Satz 19) ausgeschlossen. *Zweizählige* gleiche Axen können noch parallel den Radien nach den Ecken eines regulären ebenen Polygons verlaufen. Wieviel Ecken dies Polygon hat, und ob es etwa gleichzeitig in mehreren Lagen vorkommen kann, lässt sich erst an späterer Stelle entscheiden. (Vergl. Satz 18.)

Satz 14. *Andere als die bisher gefundenen Richtungen sind für gleiche n -zählige Axen (abgesehen von den 2-zähligen) nicht möglich.*

Beweis. Zunächst wird gezeigt, dass parallel dem Radius nach dem Mittelpunkt eines der in Satz 12 gefundenen regulären sphärischen Polygone keine gleiche Axe verlaufen kann. Zu dem Zweck vergleicht man den zwischen einer Ecke und dem Mittelpunkt des sphärischen Polygons gelegten Bogen ϱ mit der Polygonseite σ . Sobald sich dabei $\varrho < \sigma$ herausstellt, kann nach dem Mittelpunkt keine gleiche Axe ver-

laufen, weil σ der kleinste Winkel zweier gleichen n -zähligen Axen ist. (Vergl. den Beweis zu Satz 11.)

Zur Erlangung der Zahlenwerthe von ϱ und σ bei den sphärischen Polygonen, die den 4 in Betracht kommenden regulären Polyedern zugehören, kann man so verfahren: Bezeichnet R den Radius der um das Polyeder beschriebenen Kugel, welche mit der bisher benutzten Konstruktionskugel identisch ist, und r den Radius der einbeschriebenen Kugel, so bestimmt ein nach einer Polyederecke verlaufender Radius R , und der nach einer benachbarten Polyederflächenmitte gezogene Radius r zusammen ein rechtwinkliges Dreieck, aus welchem folgt $\cos \varrho = \frac{r}{R}$. Ferner bilden die nach 2 benachbarten Polyederecken gezogenen Radien R und die Polyederkante a ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Winkel σ an der Spitze, so dass $\sin \frac{\sigma}{2} = \frac{a}{2R}$. Weil ϱ und $\frac{\sigma}{2}$ rechtwinkligen Dreiecken angehören, so sind es spitze Winkel; und daher bestimmen sie sich eindeutig aus diesen Formeln, sobald man darin die durch die Kante a ausgedrückten Werthe für R und r eingesetzt hat. Diese Bestimmung ist in folgender Tabelle übersichtlich zusammengestellt.

	Dreieck des Tetraeders.	Dreieck des Oktaeders.	Viereck des Würfels.	Fünfeck des Dodekaeders.
R	$\frac{a}{4}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}\sqrt{2}$	$\frac{a}{2}\sqrt{3}$	$\frac{a}{4}\sqrt{3} \cdot (1 + \sqrt{5})$
r	$\frac{a}{12}\sqrt{6}$	$\frac{a}{6}\sqrt{6}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{a}{20}\sqrt{10} \cdot (25 + 11\sqrt{5})$
$\cos \varrho = \frac{r}{R}$	$\frac{1}{3}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}} \cdot (1 + \frac{2}{5}\sqrt{5})$
$\sin \frac{\sigma}{2} = \frac{a}{2R}$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$\frac{1}{6}\sqrt{3} \cdot (\sqrt{5} - 1)$
ϱ	$70^{\circ} 31' 43,6''$	$54^{\circ} 44' 8,2''$	$54^{\circ} 44' 8,2''$	$37^{\circ} 22' 38,5''$
σ	$109^{\circ} 28' 16,4''$	90°	$70^{\circ} 31' 43,6''$	$41^{\circ} 48' 37,2''$

Ferner ist beim *Zweieck* $\varrho = \frac{\sigma}{2}$. Also erkennt man, dass unter allen Umständen $\varrho < \sigma$ ist. Folglich kann parallel dem Radius nach dem Mittelpunkt eines der sphärischen Polygone keine gleiche Axe verlaufen wie nach den Ecken. Nach einem anderen Punkte der Polygonfläche kann eine solche

Axe erst recht nicht gerichtet sein, weil jeder andere Flächenpunkt mindestens einer Ecke noch näher liegt als der Mittelpunkt, so dass der Winkel des nach ihm gerichteten Radius mit dem nach einer Polyederecke gezogenen erst recht $< \sigma$ wird. —

Dagegen braucht, wenn zweizählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Ecken eines *ebenen* Polygons (d. h. eines sphärischen, das mit einem grössten Kreise zusammenfällt, Satz 12 d) gerichtet sind, ϱ nicht kleiner als σ zu sein. Hier sind also noch andere Richtungen gleicher zweizähliger Axen möglich. (Vergl. Satz 18.)

§ 7. Arten und Richtungen der verschiedenen in demselben System vorhandenen Axen.

Satz 15. *Wenn gleiche n -zählige Axen nur nach einer Richtung verlaufen, so können irgend welche andere Axen des Systems doch nur nach derselben Richtung verlaufen. Solche Systeme sind also „Punktsysteme mit einer einzigen Axenrichtung“.*

Beweis. Angenommen es verlief irgend eine Axe in anderer als der gegebenen Richtung, so würde die Ausführung der zu ihr gehörenden Deckbewegung auf n -zählige Axen von neuen Richtungen führen, was gegen die Voraussetzung ist. Wäre z. B. eine zweizählige Axe senkrecht zur gegebenen Axenrichtung vorhanden, so würde sie auf gleiche n -zählige Axen von genau entgegengesetzter Richtung führen, welche ebenfalls ausgeschlossen ist. Somit bleibt die gegebene Richtung als einzig mögliche auch für irgend welche andere Axen übrig. —

Was für verschiedene Axenarten in ein und demselben „Punktsystem mit einer einzigen Axenrichtung“ vorkommen können, wird erst später ermittelt (Capitel V, § 9). In diesem § dagegen werden nur die verschiedenen Arten und Richtungen von Axen in Punktsystemen mit mehreren Axenrichtungen untersucht.

Erklärung: *Diejenigen unter allen Axen eines Systems, welche den kleinsten charakteristischen Drehwinkel besitzen, mögen Hauptaxen heissen. Sie sind die „meistzähligen“ Axen des Systems, denn n hat für sie den grössten Werth.*

Nun sind nacheinander folgende Fälle zu behandeln:

1. Gleiche Hauptaxen verlaufen nur nach zwei entgegengesetzten Richtungen.

2. Sie verlaufen nach den Ecken eines der in Satz 13 ermittelten regulären Polyeder.

3. Endlich ist noch der Fall, wo die Hauptaxen zweizählig sind, also überhaupt keine anderszähligen Axen vorkommen, besonders zu untersuchen.

Satz 16. *Wenn ein Punktsystem gleiche n -zählige Axen besitzt, die nur nach zwei entgegengesetzten Richtungen verlaufen, so besitzt es zugleich, senkrecht zu den vorigen:*

a) *zweizählige, untereinander gleiche, Axen nach n Richtungen, deren je 2 Nachbarrichtungen den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ miteinander bilden, und*

b) *andere zweizählige, untereinander gleiche, Axen, deren Richtungen die Winkel $\frac{2\pi}{n}$ der vorigen halbiren.*

Beweis zu a). Weil das System nach Voraussetzung gleiche Axen $A_{\frac{2\pi}{n}}$ von entgegengesetzten Richtungen enthält, so muss es, nach der Erklärung der Gleichheit von Axen, pag. 37, mit sich selbst zur Deckung gebracht werden können dadurch, dass man eine Axe A mit einer gleichen entgegengesetzt gerichteten zur Deckung bringt. Dies erfordert eine Umdrehung des Systems um 180° ; also gehört zu den Deckbewegungen des Systems jedenfalls eine *zweizählige* Drehung oder Schraubung um eine Axe Q , die zu den Richtungen der Axen A senkrecht verläuft. Letztere Axe kann nur zweizählig sein, denn wäre sie mehrzählig, so würden durch sie n -zählige Axen von noch mehr als den 2 entgegengesetzten Richtungen gefordert werden, was gegen die Voraussetzung ist. Durch wiederholte Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{n}}$ entspringen aus der einen Queraxe Q noch

mehrere, ihr gleiche. — Legt man wieder zu sämtlichen Axenrichtungen Parallele durch einen Punkt O eines anderen Raums, so bestimmen die sämtlichen zweizähligen Queraxen Q auf der um O beschriebenen Hülfskugel n gleichweit voneinander entfernte Punkte auf einem grössten

Kreise, zu welchem die 2 Richtungen der Axen A senkrecht stehn.

Beweis zu b) (Fig. 11). Die beiden Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ und $Q_{\frac{2\pi}{2}, m}$, welche das System nach dem Vorigen besitzt, sind zusammen äquivalent einer gewissen Schraubung (Hülfsatz VII), welche demnach auch eine Deckbewegung des Systems sein muss (Hülfsatz IX), so dass ihre Axe zu den Axen des Systems gehört. Die Richtung derselben findet man nach Hülfsatz VII und III durch folgende Konstruktion auf der Hülfskugel.

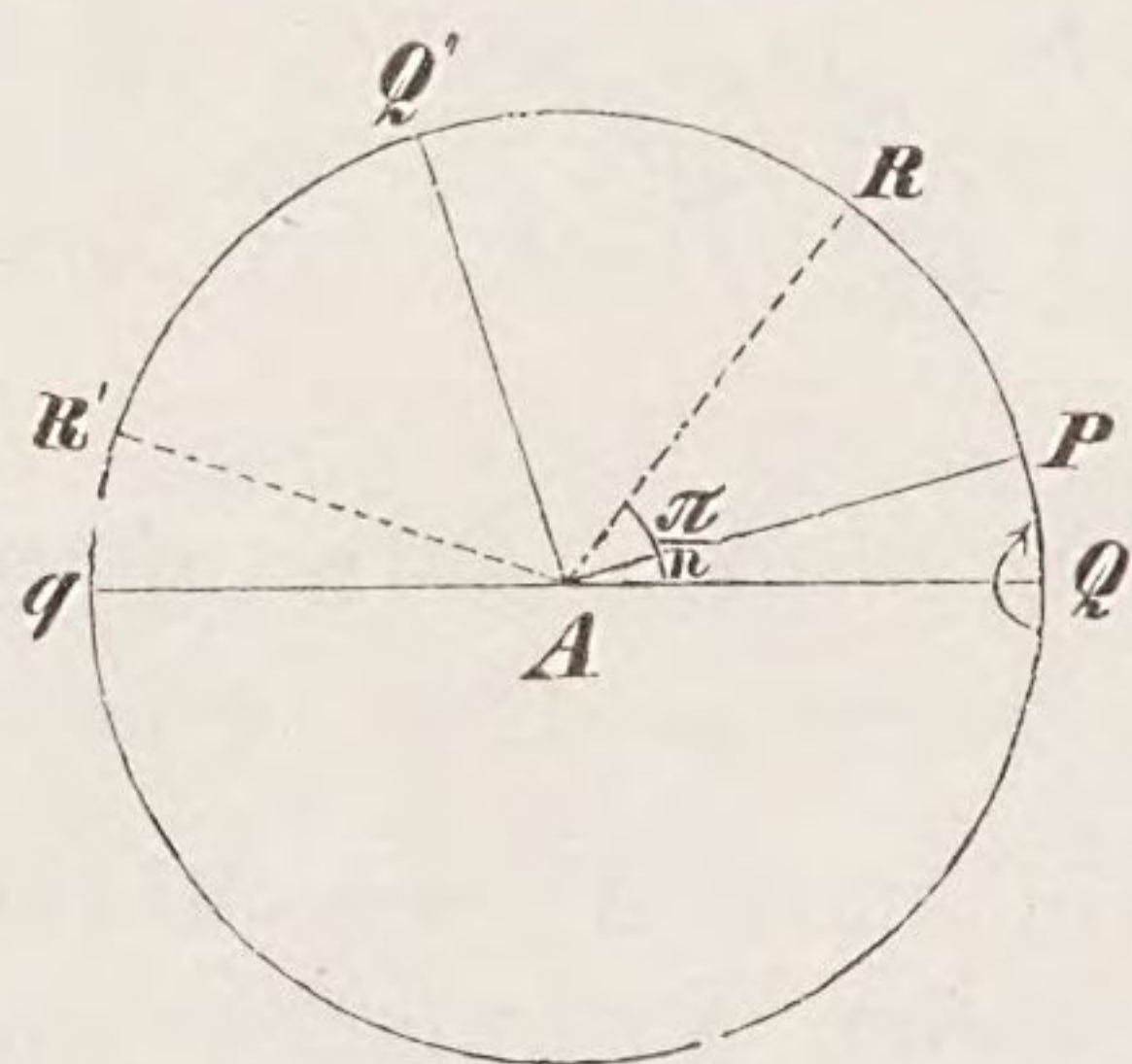


Fig. 11.

An den durch die Axenschnittpunkte A und Q gelegten grössten Kreis trägt man in A den halben zu A gehörigen Drehwinkel, also $\frac{\pi}{n}$, und in Q den zu dieser Axe gehörigen halben Drehwinkel, also $\frac{\pi}{2}$, nach der richtigen Seite hin an (Satz III). Der Schnittpunkt R beider angelegten grössten Kreise bestimmt die Richtung, und der dortige Aussenwinkel

des Dreiecks AQR , welcher $=\frac{\pi}{2}$ ist, den Drehwinkel der neuen Axe. Dieselbe ist, der Konstruktion zufolge, zweizählig, und ihre Richtung halbirt den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ zweier Nachbarrichtungen der Axen Q . — In gleicher Weise wie diese eine Axe R leiten sich die übrigen ihr gleichen ab; ihre Schnittpunkte auf der Hülfskugel halbiren die Bögen zwischen je 2 Nachbarpunkten Q .

Zusatz. Aus dem Vorhandensein der in Satz 16 angegebenen Axenrichtungen folgen keine anderen Axenrichtungen.

Beweis. Auf der Hülfskugel finden sich an allen Bögen, die irgend ein Paar Axenpunkte verbinden, in diesen Punkten alle für sie möglichen halben Drehwinkel angetragen, so dass bei der Konstruktion der zu 2 Axen äquivalenten Axen (nach Hülfsatz III) immer nur schon vorhandene Schnittpunkte von Bögen vorkommen.

Satz 17. In einem Punktsystem, dessen gleiche Hauptaxen

$A_{\frac{2\pi}{n}}$ nur nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, sind andere Axenrichtungen als die im Satz 16 angegebenen überhaupt nicht möglich (Fig. 11).

Beweis. Angenommen es gäbe eine Axe in einer anderen Richtung als den im Satz 16 gefundenen, so kann diese andere Richtung jedenfalls nur senkrecht zu den 2 Richtungen der Hauptaxen A sein; denn sonst würden für die Hauptaxen durch sie noch neue Richtungen gefordert, was gegen die Voraussetzung ist. Aus demselben Grunde könnte eine solche neue Axe, auch wenn sie senkrecht zu A wäre, doch nur zweizählig sein. Aber auch eine solche kann nicht existiren; denn angenommen es gäbe eine, von den schon ermittelten Axen Q und R verschiedene, zweizählige Axe P , so fiel der durch sie bestimmte Punkt auf der Hilfskugel zwischen irgend 2 nächstbenachbarte Punkte der vorher ermittelten zweizähligen Axen Q und R auf demselben grössten Kreise. Q sei der nächste Axenpunkt bei P , so dass der Bogen $PQ < RQ$, d. h. $< \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{n}$. Weil nun nach dem vorigen Satze die Zahl der senkrecht zu A verlaufenden Richtungen zweizähliger Axen $= 2n$ ist, so ist auch der zu Q diametral gegenüberliegende Punkt q der Kugel ein die Richtung einer zweizähligen Axe bestimmender. Die beiden Bewegungen, erst um die Axe von der Richtung OP , dann um die von der Richtung Oq , sind zusammen äquivalent einer gewissen Schraubenbewegung (Hülfsatz VII), welche nach Hülfsatz IX ebenfalls eine Deckbewegung sein muss. Ihre Axenrichtung findet man (nach VII und III), indem man an den Bogen Pq in P und q die betreffenden halben Drehwinkel, d. h. beidemal $\frac{\pi}{2}$, anträgt. Beide angetragene Bögen schneiden sich im Punkt A , also fällt die Richtung jener Deckbewegung, die mit den genannten beiden Bewegungen äquivalent ist, mit einer von beiden Richtungen der meistzähligen Axen zusammen. Der ihr zugehörige Drehwinkel ist doppelt so gross als der bei A gelegene Aussenwinkel des Dreiecks APq , also $= 2 \cdot PAQ$. Da aber $PAQ < \frac{\pi}{n}$, so wäre jener Drehwinkel $< \frac{2\pi}{n}$. Danach gäbe es in dem Punktsystem in Rich-

tung der A eine Axe mit kleinerem charakteristischen Drehwinkel als $\frac{2\pi}{n}$; dann wären also die n -zähligen Axen nicht mehr die Hauptaxen (vergl. Erkl. pag. 48), was doch vorausgesetzt war. Folglich ist eine Axe von der Richtung OP unmöglich.

Zusatz. *Es ist nicht ausgeschlossen, dass parallel den Hauptaxen auch noch minderzählige Axen existiren.*

Satz 18. *Wenn ein Punktsystem gleiche n -zählige Axen besitzt, die parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Polyeders verlaufen, so besitzt es zugleich:*

a) p -zählige, untereinander gleiche Axen, parallel den Radien nach den Mitten der das Polyeder begrenzenden p -ecke, und

b) zweizählige, untereinander gleiche Axen, parallel den Radien nach den Mitten der Polyederkanten (Fig. 12).

Beweis zu a). Die beiden Deckbewegungen um 2 gleiche n -zählige Axen von kleinster gegenseitiger Neigung sind zusammen äquivalent einer gewissen Schraubenbewegung (Hilfssatz VII), welche nach Hilfssatz IX ebenfalls eine Deckbewegung sein muss. Ihre Axenrichtung findet man (nach VII und III), indem man auf der Hülfskugel in 2 Nachbar-

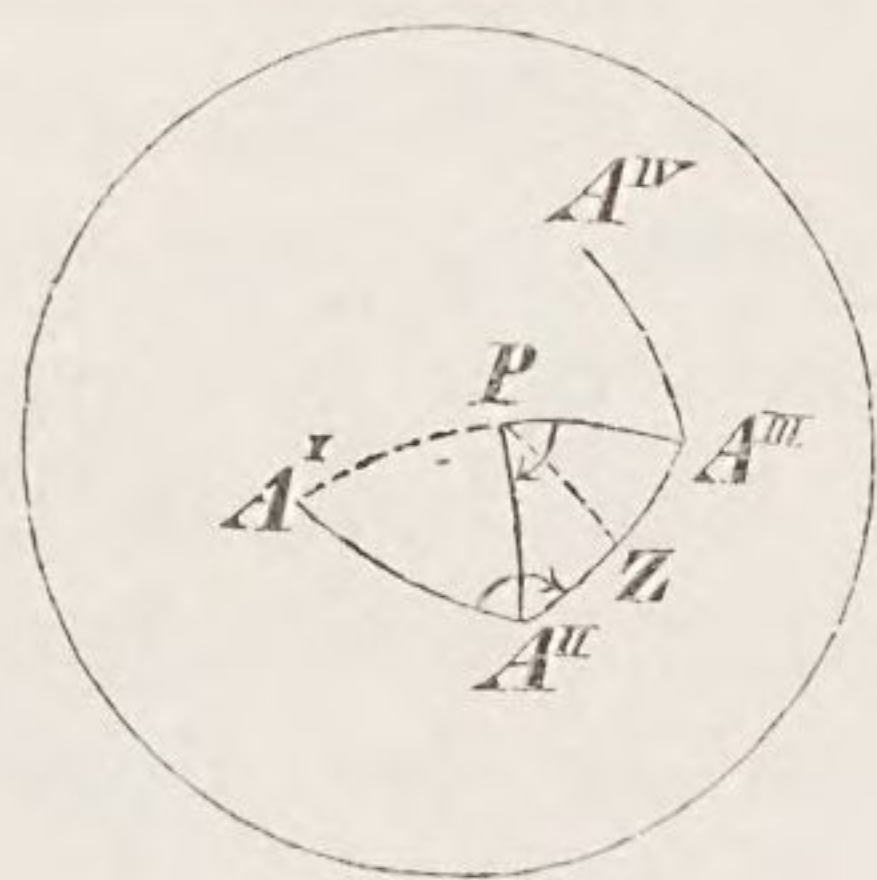


Fig. 12.

ecken ($A'' A'''$) von einem der sphärischen p -ecke (des Satzes 13) die dortigen Polygonwinkel, die ja die Grösse der n -zähligen Drehung darstellen, halbirt. Die Halbierungslinien schneiden sich im Mittelpunkt P des p -ecks, also giebt der dorthin gerichtete Kugelradius die Richtung der resultirenden Axe an; und ebensolche Axen verlaufen natürlich parallel den Kugelradien nach den Mitten aller p -ecke. Die um eine

solche Axe auszuführende Drehung ist nach Hilfssatz III doppelt so gross, als der Aussenwinkel des sphärischen Dreiecks, das durch die Seite und die Mitte des p -ecks bestimmt

ist, also $= 2 \left(\pi - \frac{2\pi}{p} \right) = \frac{p-2}{p} \cdot 2\pi$, also für das Dreieck, Viereck, Fünfeck (die nach Satz 12 und 13 allein vorkommen), resp. $= \frac{2\pi}{3}$, $2 \cdot \frac{2\pi}{4}$, $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$. Die Drehung $\frac{2\pi}{3}$ charakterisirt eine

dreizählige Axe; die Drehung $3 \cdot \frac{2\pi}{5}$ eine fünfzählige, weil

zweimalige Ausführung dieser Drehung $= \frac{6}{5} \cdot 2\pi$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, $= \frac{2\pi}{5}$ ist. Dagegen könnte die Drehung $2 \cdot \frac{2\pi}{4}$ oder π ebensowohl bei einer zweizähligen als bei einer vierzähligen Axe vorkommen, daher muss noch besonders bewiesen werden, dass die Axe im vorliegenden Fall vierzählig ist. Somit ist die p -zähligkeit der nach der Mitte der p -ecke gerichteten Axen nachgewiesen, ausser für den Fall, dass das Polyeder von Vierecken begrenzt, also ein Würfel, ist. Für diesen Fall wird der Beweis nachher besonders geführt.

Beweis zu b). Die Deckbewegungen, erst um eine der oben ermittelten p -zähligen Axen und darauf um eine, mit ihr einen möglichst kleinen Winkel bildende, n -zählige Axe, sind zusammen äquivalent einer einzigen Deckbewegung, deren Axe (nach Hülfsatz VII und III) auf der Hülfskugel durch den Schnittpunkt Z einer Seite des p -ecks mit einem senkrecht auf diese Seite durch die p -zählige Axe gelegten grössten Kreise bestimmt ist. Denn das durch diesen Punkt und die beiden vorigen Axenpunkte bestimmte Dreieck enthält in der That die halben Drehwinkel der beiden gegebenen Axen. Weil es bei Z rechtwinklig ist, und der dortige Aussenwinkel den halben Drehwinkel der äquivalenten Bewegung darstellt, so beträgt letztere Drehung 180° . Die Axe kann nur zweizählig sein, denn jede andere Zähligkeit würde noch neue n -zählige Axen fordern, was nach Satz 14 unmöglich.

Beweis zu Satz 18 für den Fall, dass das Polyeder ein Würfel ist (Fig. 13). Zu b) Weil dreizählige gleiche Axen A parallel den Kugelradien nach den Würfecken verlaufen, so sind diese Axen paarweise entgegengesetzt gerichtet. Wegen der Gleichheit dieser Axen muss das System in der Weise mit sich zur Deckung gebracht werden können, dass man eine solche Axe A' mit der entgegengesetzt gerichteten zur Deckung bringt. Folglich muss zu den Deckbewegungen des Systems eine zweizählige Drehung (oder Schraubung) gehören um eine Axe, die in einer Ebene senkrecht zu diesen dreizähligen Axen, d. h. senkrecht zu einer Würfeldiagonale, verläuft. Um die Richtung dieser Axe in der Ebene zu ermitteln, werden wieder zu allen Richtungen von Axen Paral-

lelen durch einen Punkt gelegt und die weitere Konstruktion auf der Kugel ausgeführt. Die fragliche Axe mit zweizähliger

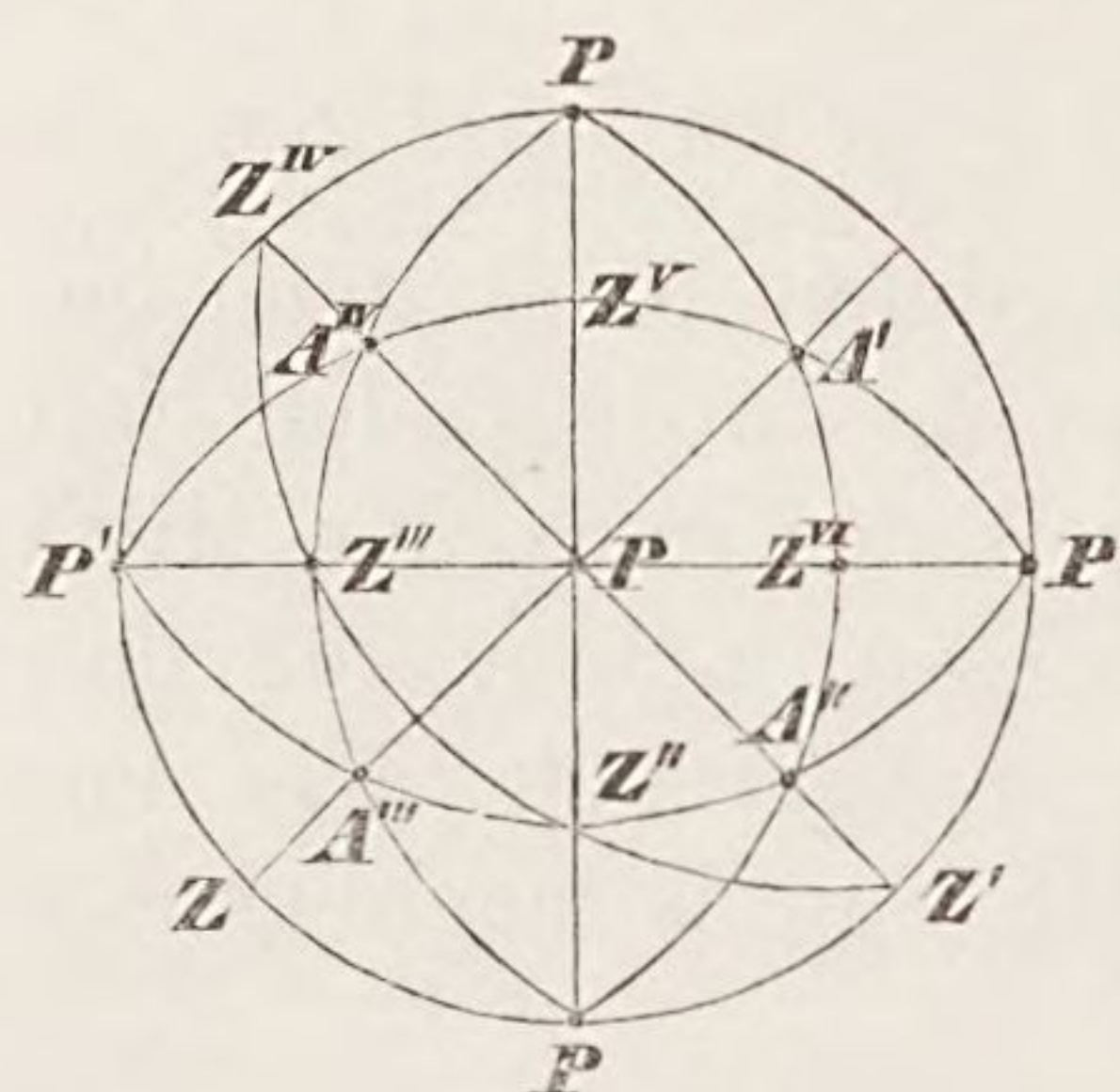


Fig. 13.

Drehung kann nun nur nach einem der Punkte gerichtet sein, in denen jene auf der einen Würfeldiagonale A' senkrechte Ebene die Würfelkanten schneidet, folglich nach einem der Punkte $Z'Z''Z'''Z^{IV}$ und zwei in der Fig. nicht sichtbaren; denn bei jeder anderen Richtung würden durch Ausführung einer zweizähligen Drehung oder Schraubung noch neue Richtungen für die dreizähligen Axen

A gefordert werden, was nach Satz 14 unmöglich. Aus demselben Grunde kann diese neue Axe nur 2-zählig, und nicht etwa 4-zählig sein. Nach welchem der Punkte Z man diese Axe gerichtet denkt, ist gleichgültig, denn durch die dreizähligen Axen ist alsdann doch immer bedingt, dass gleiche zweizählige Axen parallel den Kugelradien nach sämtlichen Kantenmitten verlaufen.

Zu a) Wie bei dem allgemeinen Beweise des Satzes 18 b) aus der Existenz p -zähliger Axen P und n -zähliger Axen A die Existenz zweizähliger Axen Z folgte: so folgt hier aus dem Vorhandensein der zweizähligen Axen Z und der dreizähligen Axen A das Vorhandensein von Axen, die parallel den Kugelradien nach den Mitten P der Vierecke verlaufen. Weil nun der bei P gelegene Aussenwinkel eines Dreiecks, das durch drei nächstbenachbarte verschiedene Axen (ZAP) gebildet wird, $= 135^\circ$, die äquivalente Drehung um die Axe P also $= 270^\circ = 3 \cdot \frac{\pi}{4}$ ist, und folglich die dreimalige Anwendung dieser Deckbewegung eine Drehung um $\frac{9 \cdot \pi}{4}$, oder einfach um $\frac{\pi}{4}$ bedingt, so ist die nach P gerichtete Axe 4-zählig.

Zusatz: *Es ist nicht ausgeschlossen, dass $p = n$ ist. Dann sind die beiderlei Axenarten zwar gleichvielzählig, aber trotzdem nicht gleich, d. h. nicht deckbar. Dieser Fall ist beim Tetraëder realisirt.*

Satz 19. *Gleiche dreizählige Axen können nicht parallel*

den Kugelradien nach den Ecken des regulären Dodekaëders verlaufen (wie es nach Satz 13 möglich schien).

Beweis. Wenn sie nämlich so verliefen, so müssten nach dem vorigen Satz 5-zählige Axen parallel den Radien nach den Mitten der regulären Fünfecke, die das Dodekaëder begrenzen, verlaufen. Solche Axen sind aber in regelmässigen unendlichen Punktsystemen unmöglich (Satz 9); also ist das Dodekaëder als „Axenrichtungen bestimmendes Polyeder“ ausgeschlossen.

Satz 20. *Der Fall, dass in einem Punktsystem vierzählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Oktaëderecken verlaufen, ist identisch mit jenem, wo dreizählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Würfecken verlaufen.*

Beweis. Aus dem Vorhandensein vierzähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Oktaëderecken folgt nach Satz 18 die Existenz dreizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Mitten der Oktaëderflächen, sowie zweizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Kantenmitten. — Nach demselben Satze folgt aus dem Vorhandensein dreizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Würfecken die Existenz zweizähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Würfelkantenmitten, sowie vierzähliger gleicher Axen parallel den Radien nach den Flächenmitten. Weil nun die Richtungen der Radien nach den Oktaëderecken dieselben sind wie die nach den Mitten der Flächen eines konzentrischen Würfels, dessen Kanten den vierzähligen Oktaëderaxen parallel laufen, so haben die vierzähligen Axen in beiden Fällen übereinstimmende Richtungen. Ferner sind die Richtungen der Radien nach den Oktaëderflächenmitten dieselben wie die nach den Ecken jenes Würfels; folglich haben auch die dreizähligen Axen in beiden Fällen übereinstimmende Richtungen. Schliesslich sind auch die Richtungen der zweizähligen Axen in beiden Fällen identisch, weil die Radien nach den Oktaëderkantenmitten mit denjenigen nach den Kantenmitten jenes Würfels zusammenfallen. Folglich sind beide Fälle völlig identisch.

Satz 21. *Aus dem Vorhandensein der in Satz 18 angegebenen Axenrichtungen folgen keine weiteren (Fig. 14 und 13).*

Beweis. Weil den beiden vorigen Sätzen zufolge nur noch das Tetraëder und der Würfel (oder statt dessen das

Oktaëder) als Axenrichtungen bestimmend in Betracht kommen, so ist nur für diese beiden der Beweis zu führen.

a) Im Falle des *Tetraëders* (Fig. 14) lege man auf der Hülfskugel durch je 2 Ecken A und je 2 über den Flächenmitten des Tetraëders gelegene Punkte P grösste Kreise, so schneiden sie sich in den Punkten Z , die den Kantenmitten entsprechen. Um jetzt für eine solche Bewegung, welche

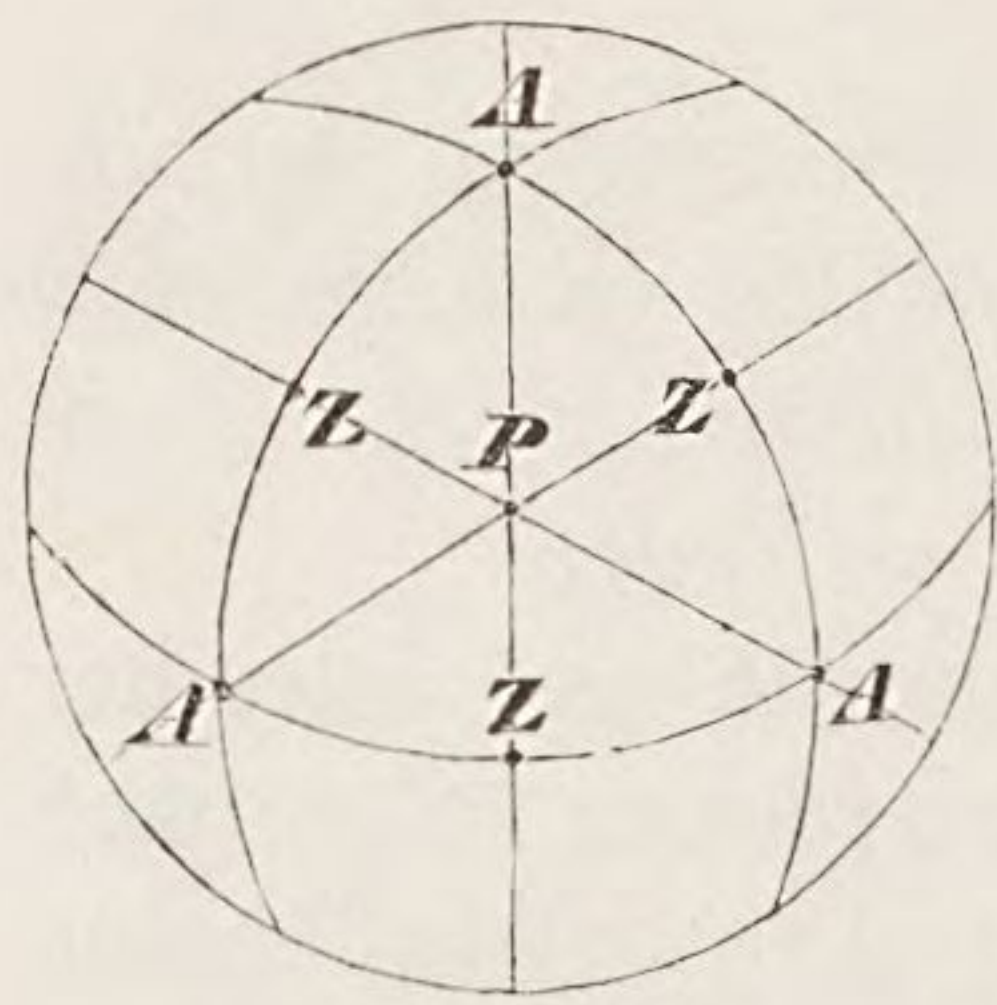


Fig. 14.

den Bewegungen um irgend 2 vorhandene Axen zusammen äquivalent ist, die Axe zu konstruiren, muss man nach Hülfsatz VII und III die beiden Axenpunkte durch einen grössten Kreis verbinden und an ihn in den Axenpunkten die betreffenden halben Drehwinkel antragen. Man bemerkt nun, dass sämtliche hierbei auftretende Kreise auf der Hülfskugel schon vorhanden

sind, — mit Ausnahme der durch je zwei Z gehenden Bogen, — und dass in den Axenpunkten alle für sie möglichen halben Drehwinkel an alle Bogen schon angetragen vorkommen. Daher treten bei der Konstruktion der zu zweien Axen äquivalenten Axe immer nur schon vorhandene Schnittpunkte von Kreisbögen, d. h. schon vorhandene Axen, auf. — Nur bei der Kombination von 2 zweizähligen Drehungen um 2 Axen Z ist dies noch unbewiesen. Nun aber verlaufen die sämtlichen zweizähligen Axen des Tetraëders längs dreier sich senkrecht schneidender Linien; daher folgt aus der Kombination je zweier solcher Drehungen nach Hülfsatz III immer nur eine der schon vorhandenen zweizähligen Axen.

b) Im Falle des *Würfels* (Fig. 13) lege man auf der Hülfskugel wieder durch je 2 Ecken A und je 2 über den Flächenmitten des Würfels gelegene Punkte P grösste Kreise, so schneiden sie sich in den Punkten Z über den Kantenmitten. Hierdurch finden sich schon durch grösste Kreise verbunden je 2 Axenpunkte A , je 2 Axenpunkte P , je ein A und ein P , und je ein P und ein Z ; und an diesen Verbindungsbögen sind in den Axenpunkten auch alle für sie möglichen halben Drehwinkel schon angetragen, so dass die Axe einer solchen Bewegung, die zweien aufeinanderfolgenden Bewegungen eines der genannten Axenpaare äquivalent

ist, immer durch einen schon vorhandenen Schnitt von Kreisbögen dargestellt wird, also mit einer schon vorhandenen Axe zusammenfällt. Es bleibt nur zu zeigen übrig, dass auch zwei aufeinanderfolgende zweizählige Bewegungen um irgend zwei Z , und ebenso zwei aufeinanderfolgende Bewegungen bezüglich um Z und um A , zusammen äquivalent sind einer Bewegung um eine schon vorhandene Axe.

α) *Je zwei Z .* Von den 12 Z kommen nur 6 in Betracht, weil je 2 diametral gegenüberliegen. Kombiniert man zunächst eine Bewegung um eine solche Axe, Z'' , mit derjenigen um eine der nächstbenachbarten Z' , Z''' , Z , Z^{IV} , so ist jedes solche Bewegungspaar nach Hilfssatz VII und III äquivalent einer Drehung um $2 \cdot \frac{2\pi}{3}$ um eine Axe A , die zu dem betreffenden Axenpaar senkrecht liegt (in den ersten beiden Fällen um A' , in den letzten beiden um A^{IV}). Kombiniert man aber zwei Bewegungen wie um Z'' und Z^V , so sind sie äquivalent einer zweizähligen Drehung um eine vierzählige Axe P' . — Hier entspringt also keine neue Axe.

β) *Eine Z und eine A .* Von den 8 A kommen nur 4 in Betracht, weil je 2 diametral gegenüberliegen. Z'' ist mit seinen nächsten Nachbaraxen A (A'' und A''') durch schon vorhandene grösste Kreise verbunden; also sind zwei aufeinanderfolgende Bewegungen um ein solches Paar äquivalent einer Bewegung um eine Nachbaraxe P . Kombiniert man aber die Bewegung um Z'' mit einer um eine entferntere Axe A' (oder A^{IV}), welche mit ihr einen rechten Winkel einschliesst, so erhält man die Axe der äquivalenten Bewegung, indem man in A' einen der möglichen halben Drehwinkel an den Bogen $Z''A'$ anträgt. Der in Z'' anzutragende halbe Drehwinkel (90°) liefert den Bogen $Z'Z''Z'''Z^{IV}$. Dieser Bogen wird von einem der in A' angetragenen Bögen in einem der Punkte Z' , Z'' , Z''' , Z^{IV} geschnitten. Also entsteht auch hierbei keine neue Axe.

Satz 22. *In Punktsystemen mit vierzähligen oder dreizähligen gleichen Axen nach mehr als 2 Richtungen sind die einzigen, für irgend welche Axen überhaupt möglichen Richtungen diejenigen der Radien nach den Ecken, den Flächenmitten und den Kantenmitten der in Satz 13 angegebenen Polyeder (Würfel, Oktaëder, Tetraëder).*

Beweis. Welche Axen das System auch besitzen mag: jedenfalls dürfen sie für die vierzähligen oder dreizähligen gleichen Axen keine anderen Richtungen als die in Satz 13 ermittelten fordern, weil diese nach Satz 14 die einzig möglichen für gleiche n -zählige Axen sind. Während nun durch Drehung der Hilfskugel sowohl um die nach den Flächenmitten des Polyeders gerichteten p -zähligen Axen, als um die nach den Kantenmitten gerichteten zweizähligen stets wieder Deckung des Polyeders mit sich selbst eintritt, so dass für die nach den Polyederecken verlaufenden n -zähligen Axen in der That keine neuen Richtungen gefordert werden, so kommt dagegen das Polyeder keinenfalls mit sich zur Deckung, wenn man es um irgend einen Radius dreht, der nicht nach einer Ecke, Flächenmitte oder Kantenmitte verläuft. Durch eine so gerichtete Axe würden also stets neue unmögliche Richtungen für die n -zähligen Axen gefordert werden; daher können so gerichtete Axen irgend welcher Art nicht vorkommen.

Zusatz. Wenn vierzählige Axen nach mehr als zwei Richtungen verlaufen, so ist es nicht ausgeschlossen, dass parallel zu ihnen auch zweizählige Axen verlaufen. Denn solche führen auf keine neuen Axenrichtungen.

Zusammenfassung der Ergebnisse von Satz 18—22. Für Punktsysteme mit gleichen vierzähligen oder dreizähligen Axen von mehr als 2 Richtungen giebt es nur folgende 2 Abtheilungen:

a) 4 dreizählige Axen verlaufen parallel den Radien nach den Tetraederecken, 4 andere dreizählige in den entgegengesetzten Richtungen, nämlich nach den Flächenmitten, gleichzeitig verlaufen 6 gleiche zweizählige parallel den Radien nach den Kantenmitten. (Anders ausgedrückt: 6 zweizählige Axen nach den Oktaederecken, 4 dreizählige nach den *abwechselnden* Flächenmitten.)

b) 6 vierzählige Axen verlaufen parallel den Radien nach den Oktaederecken, 8 dreizählige parallel den Radien nach den Oktaederflächenmitten und 12 zweizählige parallel den Radien nach den Kantenmitten.

Satz 23. In einem Punktsystem mit zweizähligen Hauptaxen können die Richtungen zweier solchen Axen nur die Winkel 0° oder 90° oder 180° einschliessen. (Fig. 15.)

Beweis. Angenommen es gäbe 2 Axenrichtungen, deren Winkel ein anderer als 0° , 90° oder 180° wäre. Der eine Axenschnittpunkt auf der Hülfskugel sei A ; von den 2 Schnittpunkten der anderen Axe betrachtet man dann denjenigen, A' , dessen Bogenabstand α von A grösser als 90° ist. (Bogen $\widehat{AA'} = \alpha > 90^\circ$). Aequivalent mit den um A und A' nacheinander auszuführenden Bewegungen ist nun eine Bewegung um eine dritte Axe H , deren Richtung nach Hülfsatz VII und III senkrecht auf den Richtungen der Axen A und A' gefunden wird, und deren Drehwinkel gleich dem doppelten bei H gelegenen Aussenwinkel des Dreiecks AHA' ist, also $= 2 \cdot (180^\circ - \alpha)$. Dieser Winkel ist nun, weil $\alpha > 90^\circ$, kleiner als 180° ; folglich wäre die Axe H mehr- als 2-zählig, was gegen die Voraussetzung ist. Dieser Widerspruch entsteht nur dann nicht, wenn α einen der Werthe 0° , 90° oder 180° hat.

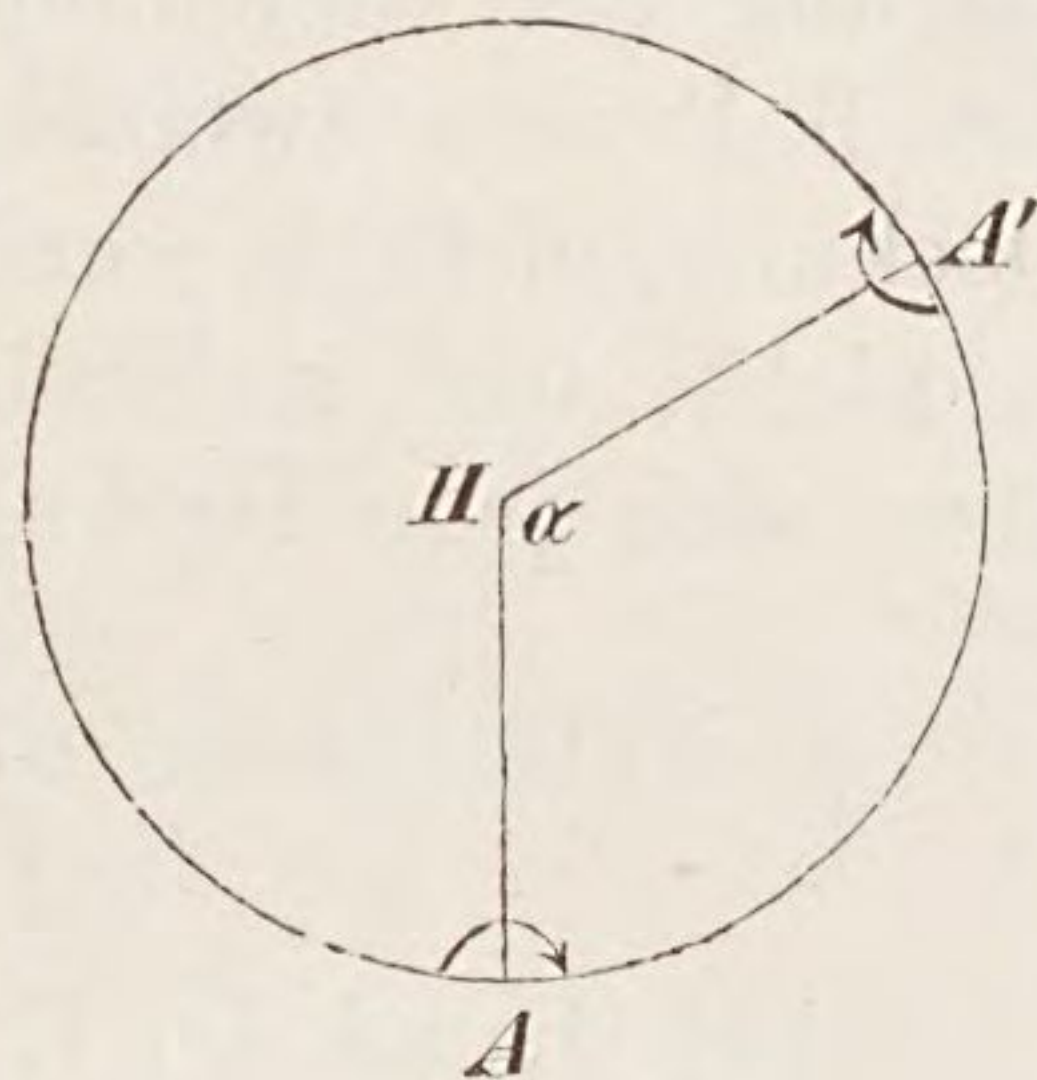


Fig. 15.

Satz 24. Wenn ein Punktsystem zweizählige Hauptaxen von verschiedenen Richtungen besitzt, so verlaufen sie nach 3 Paaren von entgegengesetzten Richtungen, deren jedes auf den beiden anderen senkrecht steht. Andere Axenrichtungen kommen dann nicht vor.

Beweis. Wenn ein Paar gleicher entgegengesetzt gerichteter zweizähliger Axen gegeben ist, so folgt daraus nach Satz 16 die Existenz der 2 anderen darauf senkrechten Paare. — Wenn aber von vornherein nur die Existenz von 2 zweizähligen Axen bekannt ist, deren Richtungen einen rechten Winkel einschliessen, so sind die Deckbewegungen um dieselben nach Hülfsatz VII und III zusammen äquivalent einer auf ihnen senkrechten zweizähligen Axe, die nach der einen oder nach der entgegengesetzten Richtung verlaufend gefunden wird je nach der Reihenfolge, in der man die beiden gegebenen Bewegungen nacheinander ausführt. Aus diesem entgegengesetzten Axenpaar und einer der gegebenen Axen folgt die Existenz eines zweiten Axenpaares parallel der anderen gegebenen Axe. — Sollte es ausserdem noch eine andere Axenrichtung geben, so müsste sie mit einer der vori-

gen einen von 0° , 90° und 180° verschiedenen Winkel bilden; und das ist nach dem vorigen Satz unmöglich.

Satz 25. *Wenn zweizählige Hauptaxen von verschiedenen Richtungen vorhanden sind, so sind je 2 aufeinander senkrechte einander nicht gleich.*

Beweis. Wären die aufeinander senkrechten einander gleich, so müssten sie sich zur Deckung bringen lassen (Erklärung der Gleichheit). Durch eine Bewegung um eine zu den 3 Paaren zweizähliger Axen gehörige Axe lässt sich die Deckung nicht bewerkstelligen; andre zweizählige Axen giebt es nicht; und mehrzählige Axen sind ausgeschlossen. Also lässt sich jene Deckung überhaupt nicht herbeiführen.

Eintheilung der regelmässigen unendlichen Punktsysteme.

Auf Grund der Ergebnisse dieses Capitels (vgl. besonders die Zusammenfassungen auf Seite 46 und 58) zerfallen sämtliche regelmässigen unendlichen Punktsysteme in folgende Abtheilungen:

- I. Systeme ohne Axen.
- II. Systeme mit einer einzigen Axenrichtung.
 1. Die Hauptaxen sind 6-zählig.
 2. „ „ „ 4-zählig.
 3. „ „ „ 3-zählig.
 4. „ „ „ 2-zählig.
- III. Systeme mit gleichen Hauptaxen nach nur zwei (und zwar entgegengesetzten) Richtungen.
 1. Die Hauptaxen sind 6-zählig.
 2. „ „ „ 4-zählig.
 3. „ „ „ 3-zählig.
 4. „ „ „ 2-zählig.
- IV. Systeme mit gleichen Hauptaxen nach mehr als zwei Richtungen.
 1. Die Hauptaxen sind 3-zählig.
 2. „ „ „ 4-zählig.

Abschnitt II.

Konstruktion der regelmässigen allseitig
unendlichen Punktsysteme.

Capitel IV.

Punktsysteme ohne Axen.

§ 8. Konstruktion der Systeme ohne Axen. (Fig. 1. Tafel I.)

Gegeben sei ein regelmässiges unendliches Punktsystem, unter dessen Deckbewegungen keine Drehungen oder Schraubungen vorkommen, sondern die sämtlich nur in Schiebungen bestehen. P und P' seien 2 Punkte des Systems, welche so liegen, dass kein anderes Punktpaar einen kleineren Abstand habe als dieses. Wegen der Regelmässigkeit des Systems müssen sich beide Punkte zur Deckung bringen lassen, wobei gleichzeitig das ganze bewegliche System mit dem festen zur Deckung gelangt. Weil nun als Deckbewegungen nur Schiebungen vorkommen, so muss $PP' = \lambda_1$ eine Deckbewegung sein. Durch diese Bewegung gelangt P' an einen Ort P'' , so dass $P''P' = P'P$. Es ist also auch P'' ein Punkt des festen Systems. So fortschliessend erkennt man, dass in dem Systeme Punkte in gleichen Abständen eine gerade Linie L besetzen. Andere als diese Punkte können auf der Linie nicht vorkommen; denn jeder noch ausserdem vorhandene Punkt würde von einem der äquidistanten Punkte einen kleineren Abstand als PP' haben; und das ist unmöglich. — Ferner sei Q ein solcher Punkt des Systems, dass kein anderer näher als er an der Geraden L liege. Derjenige Systempunkt auf der Linie L , welcher zu Q am nächsten liegt, heisse P . Die Deckbewegung $PQ = \lambda_2$ lehrt die Existenz von Systempunkten, die eine zu L parallele Linie L' in kongruenter Weise besetzen, als wie L besetzt ist. Dabei gelangt Q nach Q' , also ist auch Q' ein Punkt des Systems. Wiederholte Ausführung dieser Deckbewegung lehrt die Existenz von Systempunkten, die lauter parallele gleich-

weit abstehende Linien L in kongruenter Weise besetzen, so dass ein parallelogrammatisches Punktnetz gebildet wird. — In derselben Ebene E können keine anderen Punkte des Systems liegen, denn auf einer der Linien L ist es nicht möglich, weil sonst PP' nicht mehr der kleinste Punktabstand wäre; und zwischen 2 Linien L ist es auch nicht möglich, sonst würde die Deckbewegung, welche einen solchen Punkt in einen Systempunkt auf der nächsten Linie L hineinführt, die Existenz von Punkten nach sich ziehn, die näher als Q an L lägen, was unmöglich ist.

Endlich sei R ein solcher Punkt des Systems, dass kein anderer näher als er an der mit Punkten besetzten Ebene E liege. Seine Orthogonalprojektion auf die Ebene sei r . Der an R nächste Systempunkt dieser Ebene sei P . Dann liefert die Deckbewegung $PR = \lambda_3$ die Existenz von Systempunkten, welche eine zu E parallele Ebene in kongruenter Weise besetzen, als wie E besetzt ist. Dabei gelangt R nach R' , also ist auch R' ein Punkt des Systems. Wiederholte Ausführung dieser Deckbewegung PR lehrt die Existenz von Systempunkten, welche lauter parallele, gleichweit abstehende Ebenen in kongruenter Weise besetzen. *Die Gesamtheit dieser Systempunkte bildet ein Raumgitter mit parallelepipedischen Maschen.* — Andere als diese Punkte können nicht zu dem System gehören; denn zunächst kann in keiner der Ebenen E ein anderer als die bisher konstruirten Punkte liegen, weil sonst auch in der ursprünglichen Ebene noch ein entsprechender neuer Punkt liegen müsste, was nach dem Vorigen unmöglich ist; sodann kann aber auch zwischen 2 Ebenen E kein neuer Punkt liegen, weil sonst auch ein entsprechender zwischen der ursprünglichen und ihrer Nachbar-ebene liegen müsste, was nach dem Vorigen wiederum unmöglich ist.

*Resultat: Regelmässige unendliche Punktsysteme ohne Axen sind Raumgitter mit parallelepipedischen Maschen; sie werden gebildet von der Gesamtheit der Schnittpunkte dreier Züge von parallelen, je äquidistanten Ebenen.*¹⁾ Die Charakteristik durch die Deckbewegungen ist: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

1) Die hier gegebene Ableitung ist im Wesentlichen die früher von mir veröffentlichte in Pogg. Ann. Bd. 132. pag. 77. 1867.

Anmerkung. Nicht alle Raumgitter sind axenlos; sondern bei passender Wahl der Kanten und Winkel der parallelepipedischen Maschen besitzen sie Axen (vgl. Seite 19, 20, 21). Daraus erklärt es sich, dass sie von Seeber, Frankenheim, Delafosse und Bravais für die wahren Strukturformen aller Krystalle gehalten werden konnten.

Capitel V.

Punktsysteme mit Hauptaxen von einer einzigen Richtung.

§ 9. Anordnung der Axen in solchen Systemen, deren Hauptaxen in lauter parallelen Geraden liegen.

Der Inhalt dieses § bezieht sich, gemäss seiner Ueberschrift, im Allgemeinen nicht nur auf Systeme mit einer einzigen Axenrichtung, sondern auch auf solche, in denen gleiche Hauptaxen nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. (Zum Verständniss des letzteren Falles vergleiche man den Beweis zu Satz 16, a.)

Erklärung: *Der Abstand zweier nächsten Hauptaxen, die in parallelen Geraden liegen, wird stets mit a bezeichnet werden; der Abstand zweier nächsten gleichen und gleichgerichteten Hauptaxen mit e .*

Erklärung: *Hauptebene heisst eine zur Hauptaxenrichtung senkrechte, durch einen Systempunkt gelegte, Ebene.*

Alle Figuren dieses § sind in einer Hauptebene ausgeführt zu denken; dabei sind die Schnittpunkte mit den Axen durch dieselben Buchstaben wie die ganzen Axen bezeichnet.

1) *Anordnung der Axen in Systemen, deren Hauptaxen sechszählig sind und nach einer oder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. (Fig. 16.)*

A und A' seien 2 in Parallellinien verlaufende sechszählige Axen von solcher Lage, dass kein andres Paar sechszähliger Axen einen kleineren Abstand besitze als diese beiden; er heisse a . Dann gehn durch wiederholte Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{6}}$ um A , aus A' noch 5 andere ihr

gleiche Axen hervor, so dass 6 gleiche Axen $A'A''\dots A^{VI}$ existiren müssen, die in der Hauptebene ein reguläres Sechseck um A als Centrum bestimmen. — Ebenso findet man

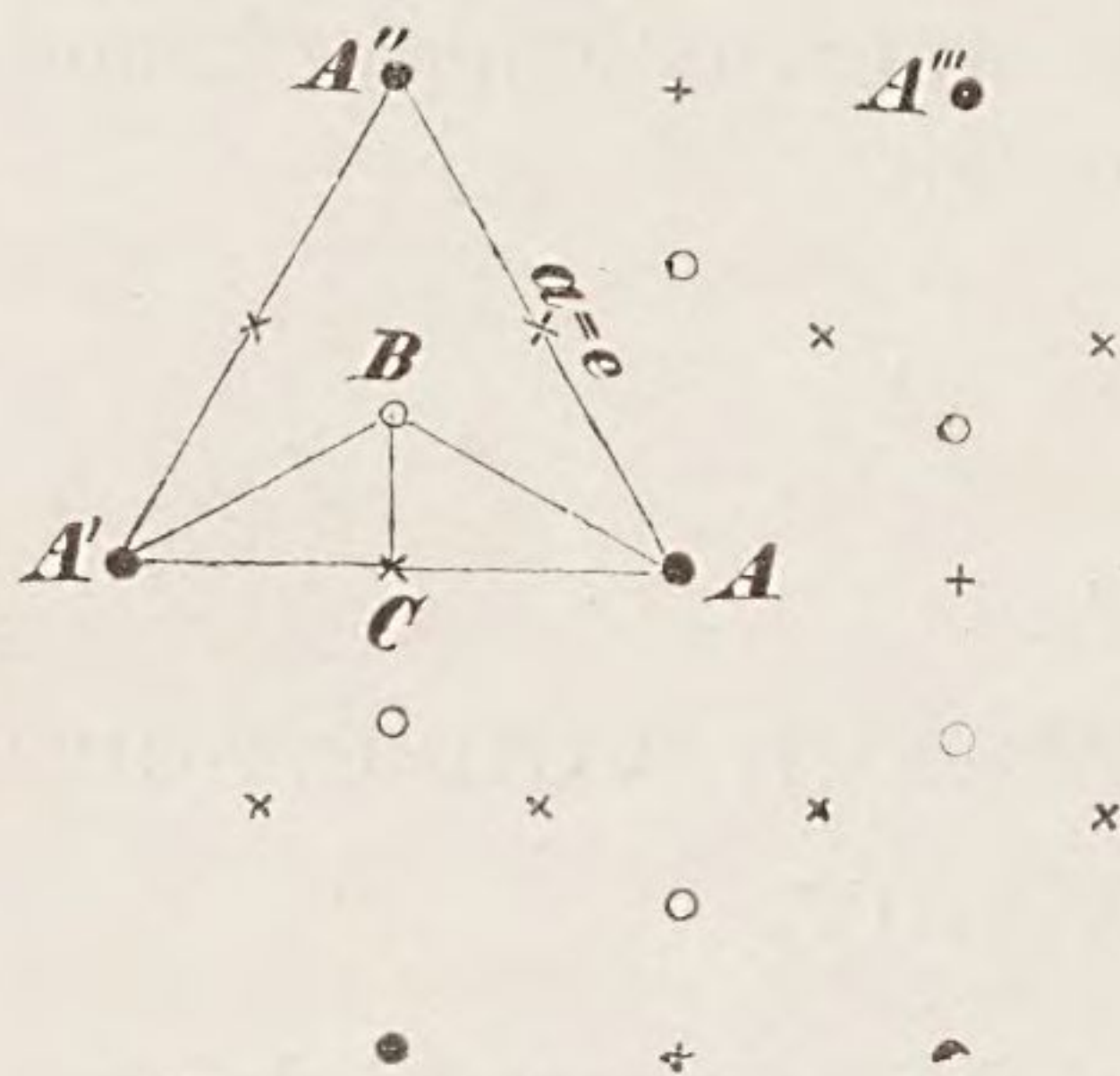


Fig. 16.

durch Ausführung der entsprechenden Deckbewegung um A' 6 untereinander gleiche Axen, die durch die Ecken eines regulären Sechsecks gehn, das A' zum Centrum hat. Zu diesen Axen gehören unter anderen auch A und A'' , welche somit gleich sind. Vorher waren aber schon A' und A'' als 2 gleiche Axen erkannt. Also sind 3 nächste sechszählige Axen, die

ein gleichseitiges Dreieck bestimmen, einander gleich; folglich ist $a = e$. Weil nun um jede sechszählige Axe in derselben Weise wie vorher 6 gleiche Axen herumstehn müssen, so folgt:

Satz 26. *Die Gesammtheit der sechszähligen gleichen, in parallelen Geraden verlaufenden Hauptaxen A bestimmt in der Hauptebene ein Netz von gleichseitig dreieckigen Maschen.*

Zusatz 1. *Andere sechszählige Axen als die so konstruirten giebt es nicht; denn jede neue derartige Axe würde von einer der bisher gefundenen um weniger als a abstehn, was unmöglich ist. Dagegen giebt es noch minderzählige Axen. Nämlich die Deckbewegungen um 2 sechszählige Nachbaraxen A' und A sind nach Hülfsatz IV und Zusatz äquivalent einer Deckbewegung um eine parallele dreizählige Axe B , gehend durch die Mitte eines gleichseitigen Dreiecks, das A und A' zu Ecken hat. Also:*

Zusatz 2. *Untereinander gleiche dreizählige Axen B , parallel den Hauptaxen, gehn durch die Mitten aller gleichseitig dreieckigen Maschen, die durch die sechszähligen Hauptaxen bestimmt sind.*

Ferner ist die Deckbewegung um A nebst der darauf folgenden Deckbewegung um eine benachbarte B , nach denselben 2 Hülfsätzen äquivalent einer einzigen Deckbewegung um eine parallele zweizählige Axe C , gehend durch die Seiten-

mitte eines der um A herumliegenden, durch die Hauptaxen bestimmten, gleichseitigen Dreiecke. Also:

Zusatz 3. *Untereinander gleiche zweizählige Axen C , parallel den Hauptaxen, gehen durch die Seitenmitten aller gleichseitig dreieckigen Maschen, die durch die sechszähligen Hauptaxen A bestimmt sind.*

Satz 27. *Das Vorhandensein der drei Axenschaaren A, B, C zieht die Existenz keiner weiteren Axe nach sich.*

Beweis. Zunächst folgt aus Hülfsatz IV nebst Zusatz, dass die Ausführung der charakteristischen Bewegungen um ein Paar *nächstbenachbarter*, gleicher oder ungleicher Axen (AA, AB, AC, BB, BC oder CC) auf keine Axe führt, welche nicht schon unter jenen 3 Schaaren vorhanden wäre. Um ferner diejenige Bewegung zu ermitteln, welche den aufeinanderfolgenden charakteristischen Bewegungen um irgend zwei *nicht nächstbenachbarte* Axen äquivalent ist, ersetzt man die charakteristische Schraubung um die eine der beiden gegebenen Axen, nach Hülfsatz II Zusatz, durch die gleiche Schraubung um eine gleiche Axe, welche zu der zweiten gegebenen Axe nächstbenachbart ist, verbunden mit einer gewissen Schiebung s . Wegen der Gleichheit der Axen ist die letztere Schraubung ebenfalls eine Deckbewegung des Systems (woraus nach Hülfsatz IX auch jene Schiebung s als eine Deckbewegung erkannt wird). Jetzt sind also 2 charakteristische Schraubungen um 2 nächstbenachbarte Axen auszuführen, und hiermit ist, nach dem Vorigen, eine Schraubung um eine der bereits als vorhanden erkannten Axen äquivalent. — Also wird durch die 3 Axenschaaren keine weitere Axe gefordert.

Satz 28. *In einem Punktsystem mit sechszähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung sind keine anderen Axen möglich, als die sechs-, drei- und zweizähligen des Satzes 26 nebst Zusätzen 2 und 3.*

Beweis. Jede andere Axe würde nämlich neue Lagen für die Hauptaxen nach sich ziehen, was nach Zusatz 1 zu 26 unmöglich.

Zusatz. *Bei sechszähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch zweizählige, auf ihnen senkrechte Axen. (Satz 16.) Näheres in Cap. VI.*

2) *Anordnung der Axen in Systemen, deren Haupt-*

mit der Schraubung $B_{+\frac{2\pi}{4}, 3m'}$, d. h. mit einer Schraubung desselben Drehungssinnes als bei A . Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, l}$ und $B_{\frac{2\pi}{4}, 3m}$ sind nun zusammen äquivalent einer zweizähligen Schraubung um C , wie vorher. Also:

Zusatz 2. *Zweizählige gleiche Axen C , parallel den Hauptaxen, gehen durch die Mitten aller Quadrate, deren Seiten durch 2 nächstbenachbarte vierzählige Axen A und B bestimmt sind.*

Satz 30. *Das Vorhandensein der bisher ermittelten vierzähligen und zweizähligen Axen (A, B, C) zieht die Existenz keiner weiteren Axe nach sich.*

Beweis ist wörtlich derselbe wie bei Satz 27.

Satz 31. *Eine Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene gleich dem Abstände a zweier nächsten vierzähligen Axen A und B ist, kann nicht zu den Deckbewegungen des Systems gehören.*

Beweis. Denn nach Hülfsatz II nebst Zusatz würde eine solche Schiebung, verbunden mit einer vierzähligen Drehung (oder Schraubung) um eine Axe A oder B äquivalent sein einer vierzähligen Bewegung um eine Axe C . Folglich wäre C eine vierzählige Axe; das ist aber unmöglich, weil C näher an A liegt, als B , während doch A und B ein Paar nächstbenachbarter vierzähliger Axen sein sollten.

Satz 32. *In einem Punktsystem mit vierzähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung sind keine anderen Axen möglich als die vier- und zweizähligen des Satzes 29 nebst Zusatz 2.*

Beweis. Jede andere Axe, ausser einer solchen, welche mitten zwischen 2 nächsten Hauptaxen A, B verlief, würde auf neue Lagen für die Hauptaxen führen, was nach Zusatz 1 zu Satz 29 unmöglich. Aber auch mitten zwischen 2 nächsten Hauptaxen A und B darf keine Axe verlaufen. Existierte nämlich eine solche (M), so könnte sie höchstens zweizählig sein, weil sonst neue Lagen für vierzählige Axen gefordert würden. Würde man nun die zweizählige Deckbewegung um eine solche Axe M , und darauf die zweizählige Deckbewegung um die nächste Axe C des festen Systems ausführen, so käme das bewegliche System in dieselbe Lage wie durch eine Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene

$= 2 \cdot CM = a$ wäre. Da dies nach dem vorigen Satz unmöglich ist, so kann auch keine Axe M existiren.

Zusatz. Bei vierzähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch, senkrecht zu ihnen, zweizählige Axen (Satz 16). Näheres in Cap. VI.

Satz 33. Je 2 nächste vierzählige Axen A und B sind ungleich.

Beweis. Bei Gleichheit müssten sie sich nämlich zur Deckung bringen lassen (nach der Erkl. der Gleichheit). Nun ist von den vorhandenen Axen keine geeignet, dass durch Drehung um sie 2 benachbarte Hauptaxen A und B zur Deckung kämen. Ebenso wenig aber giebt es eine Deck-schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene $= AB = a$ wäre (Satz 31). Also ist die Deckung von A und B nicht ausführbar; folglich sind diese Axen einander nicht gleich.

3) Anordnung der Axen in Systemen, deren Haupt-axen dreizählig sind und nach einer oder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. (Fig. 18.)

A und B seien 2 in Parallellinien verlaufende dreizählige Axen von solcher Lage, dass kein andres Paar dreizähliger Axen einen kleineren Abstand habe als dieses; er heisse a . Dann gehn durch wiederholte Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{3}}$ aus B noch 2 ihr gleiche Axen

B', B'' hervor, so dass 3 gleiche Axen B existiren müssen, die in der Hauptebene ein gleichseitiges Dreieck um A als Centrum bestimmen. Ebenso müssen 3 untereinander gleiche

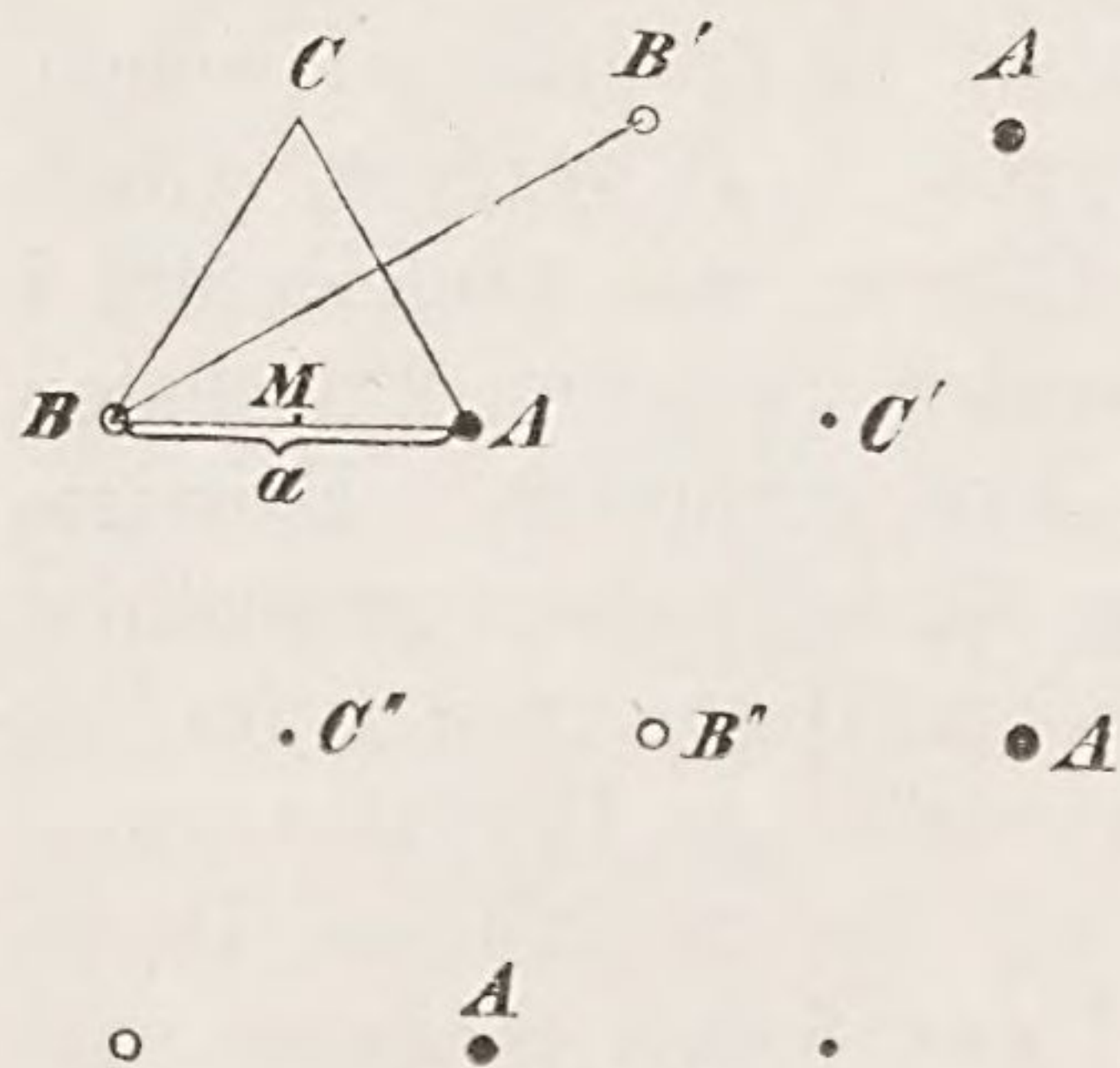


Fig. 18.

Axen A um B herumliegen. So fortschliessend findet man die Hauptebene erfüllt von Axenschnittpunkten, die ein Netz von regelmässig sechseckigen Maschen bilden, und zwar so, dass je 2 nächste dreizählige Axen verschiedene Benennung (A, B) haben. — Neben diesen giebt es noch andere dreizählige Axen C , welche durch die Mitten der sechseckigen Maschen gehn. Eine solche Axe gehört näm-

lich zu einer Deckbewegung, welche äquivalent ist den charakteristischen Deckbewegungen um 2 nächste dreizählige Axen A und B . Dies folgt, bei gleichem Drehungssinn der beiden Ausgangsaxen A und B , unmittelbar aus Hülfsatz IV (und Zusatz); entgegengesetzter Drehungssinn aber lässt sich auf gleichen zurückführen, wie bei der Ableitung des Zusatzes 2 zu Satz 29. Also folgt:

Satz 34. *Die Gesammtheit der dreizähligen in parallelen Geraden verlaufenden Hauptaxen bestimmt in der Hauptebene ein Netz mit gleichseitig dreieckigen Maschen, wobei jede Masche von 3 ungleich benannten Axen A, B, C gebildet wird. Jede der 3 Axenarten für sich bildet ebenfalls ein Netz mit gleichseitig dreieckigen Maschen.*

Zusatz. *Andere dreizählige Axen als die so konstruirten giebt es nicht; denn jede neue derartige Axe würde von einer der vorigen um weniger als α abstehn, was unmöglich.*

Satz 35. *Das Vorhandensein der bisher ermittelten dreizähligen Axen A, B, C zieht die Existenz keiner weiteren Axen nach sich.*

Beweis ist wörtlich derselbe wie bei Satz 27.

Satz 36. *In einem Punktsystem mit dreizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung sind überhaupt keine anderen Axen als die dreizähligen des Satzes 34 möglich.*

Beweis: Weil keine anderen dreizähligen Axen existiren können (Satz 34, Zusatz), so kommen nur zweizählige in Frage. Nun würde jede zweizählige Axe, ausser einer solchen, die mitten zwischen 2 nächsten Hauptaxen verlief, auf neue Lagen für die Hauptaxen führen, was unmöglich. Aber auch mitten zwischen zwei nächsten Hauptaxen (wie A und B) darf keine zweizählige Axe verlaufen. Existirte nämlich eine solche (M), so würden die charakteristischen Bewegungen, die man nacheinander um sie und um eine nächste Hauptaxe (z. B. A) ausführen würde, äquivalent sein einer Bewegung um eine der schon vorhandenen dreizähligen Axen (z. B. C), jedoch betrüge der resultirende Drehwinkel (nach Hülfsatz IV) $2 \cdot (90^\circ + 60^\circ) = \frac{5}{6} \cdot 2\pi$. Danach wäre also die resultirende Axe sechszählig; eine solche ist aber in Systemen, deren meistzählige Axen dreizählig sind, unmöglich.

Zusatz. *Bei dreizähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch zweizählige auf ihnen senkrechte Axen.* (Satz 16.) Näheres in Cap. VI.

Satz 37. *Je 2 nächste dreizählige Axen (z. B. A und B) sind ungleich.*

Beweis. Bei Gleichheit müssten sie sich nämlich zur Deckung bringen lassen. Nun ist von den vorhandenen Axen keine geeignet, dass durch Drehung um sie 2 benachbarte Axen zur Deckung kämen. Also könnte die Deckung nur durch eine Schiebung herbeigeführt werden, deren Projektion auf die Hauptebene $= a$ wäre. Eine solche Schiebung aber, verbunden mit der charakteristischen Deckbewegung um eine der Hauptaxen, wäre, nach Hülfsatz II nebst Zusatz, äquivalent einer dreizähligen Bewegung um eine Axe, welche durch das Centrum eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a ginge. Dies wäre also eine neue dreizählige Axe, was nach Zusatz zu 34 unmöglich ist. Also kann auch jene Schiebung keine Deckbewegung sein. Daher ist die Deckung zweier Nachbaraxen überhaupt nicht ausführbar.

4) *Anordnung der Axen in Systemen, deren Hauptaxen zweizählig sind und nach einer oder nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen.* (Fig. 19.)

A und B seien 2 in parallelen Geraden verlaufende zweizählige Axen von solcher Lage, dass kein anderes Paar einen kleineren Abstand habe als dieses, er heisse a' . Durch Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$ geht aus B eine ihr gleiche Axe B' hervor, und durch Ausführung der Bewegung $B_{\frac{2\pi}{2}, m}$ aus A eine ihr gleiche A' . So fortschliessend findet

man, dass die beiden Axenarten A und B stets miteinander abwechseln, so dass ihre Schnittpunkte in der Hauptebene eine gerade Linie L äquidistant besetzen. — Unmittelbar werden keine weiteren Axen gefordert. Weil aber das Punktsystem allseitig unendlich und regelmässig sein soll, so müssen auch noch ausserhalb der Linie L zweizählige in parallelen Geraden verlaufende Axen vorkommen. Unter diesen sei C eine solche, dass keine andere näher als sie an der Geraden L liege. Die Ausführung der Deckbewegung $C_{\frac{2\pi}{2}, n}$ liefert

neue Lagen der Axenarten A und B , nämlich so, dass in der Hauptebene eine zu L parallele Linie L_1 in kongruenter Weise wie L mit Axenschnittpunkten besetzt ist. Jetzt trifft jede von einem auf L gelegenen Axenpunkt aus nach C gelegte Gerade, um sich selbst verlängert, eine der Ausgangsaxe gleiche Axe. Diejenige unter allen durch L gehenden Axen, welche bei C am nächsten liegt, habe von C den Abstand a'' . — Die auf L_1 vorhandenen Axen fordern noch andere, welche eine Gerade L_2 in kongruenter Weise wie L besetzen, und es liegt L_2 so zu L_1 , wie L_1 zu L . In gleicher Weise findet man unendlich viele analog besetzte Linien L .

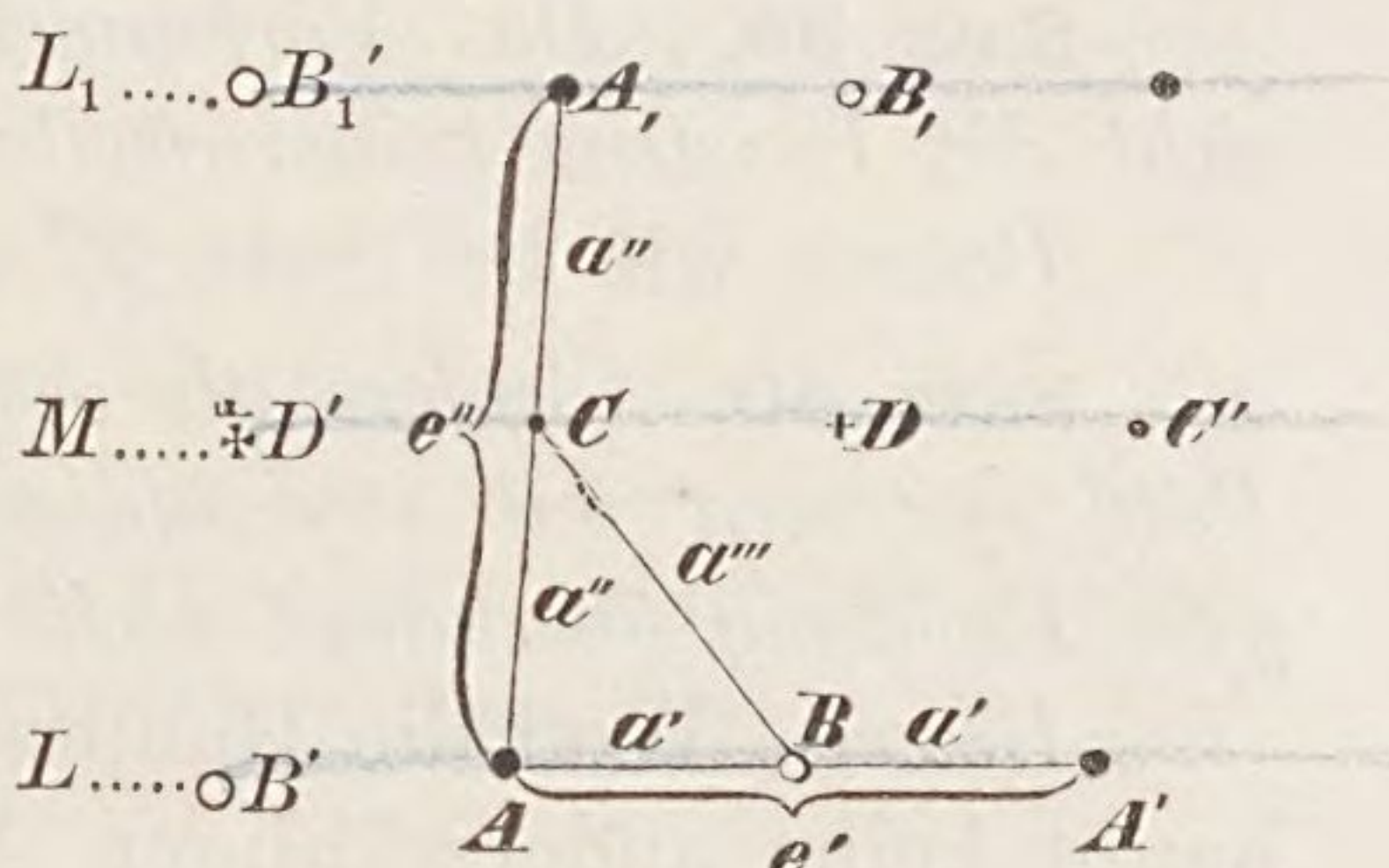


Fig. 19.

— Ferner ergibt sich aus den 2 gleichen Axen A und A' nach Hülfsatz II nebst Zusatz die Existenz einer Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene $= AA' = 2a'$ ist; sie ist nach Hülfsatz IX eine Deckbewegung. Die wiederholte Ausführung dieser Deckschiebung liefert untereinander gleiche Axen $C', C'', \dots$, deren Schnittpunkte eine durch C gehende, zu L parallele Gerade M in gleichen Abständen $2a'$ besetzen. Analoge Axen finden sich auf Geraden mitten zwischen je 2 benachbarten Linien L . — Nach Hülfsatz II nebst Zusatz ist ferner eine Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebenen $= 2a'$ ist, nebst der zweizähligen Bewegung um eine Axe C äquivalent einer zweizähligen Bewegung um eine auf M gelegene Axe D , welche um a' von C absteht. Diese Axe muss nach Hülfsatz IX die Axe einer Deckbewegung sein. Folglich sind alle Linien M in Abständen a' abwechselnd mit Axen C und D besetzt. Also folgt:

Satz 38. Die Gesammtheit der zweizähligen in parallelen Geraden verlaufenden Hauptaxen bestimmt in der Hauptebene ein Netz mit parallelogrammatischen Maschen, und zwar wird jede Masche von 4 ungleich benannten Axen A, B, C, D gebildet.

Zusatz. Andere in gleichen Richtungen verlaufende zweizählige Axen, als die so konstruirten, gibt es nicht.

Beweis. Eine andere zweizählige Axe kann nicht durch eine der Linien L oder M verlaufen, sonst käme ein kleinerer

Axenabstand als a' vor. Ferner kann auch keine Axe zwischen 2 benachbarten Linien L und M liegen, sonst müsste auch eine entsprechende zwischen der Anfangs benutzten Linie L und ihrer Nachbarlinie M sich finden, was unmöglich, weil die auf M befindliche Axe C am nächsten an L sein sollte.

Satz 39. *Das Vorhandensein der bisher ermittelten Axen zieht die Existenz keiner weiteren Axe nach sich.*

Beweis wie bei Satz 27.

Satz 40. *Andere als die bisher konstruirten Axen sind in Punktsystemen mit zweizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung überhaupt nicht möglich.*

Beweis. Weil die Hauptaxen 2-zählig sind, giebt es überhaupt keine anderszähligen Axen; und für sämtliche zweizähligen von dieser Richtung sind alle möglichen Lagen in Satz 38 enthalten, wie in Zusatz zu 38 bewiesen.

Zusatz. *Bei zweizähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen giebt es noch zweizählige auf ihnen senkrechte Axen. (Satz 24.) Näheres in Cap. VI.*

Satz 41. *Die 4 verschieden benannten zweizähligen Axenarten A, B, C, D sind ungleich.*

Beweis. Wären nämlich zwei benachbarte von ihnen gleich, so müssten sie sich zur Deckung bringen lassen. Dies ist durch Drehung um eine der vorhandenen Axen unerreikbaar. Also bleibt nur eine Schiebung a' als Deckbewegung übrig. Aber eine solche, verbunden mit einer zweizähligen Bewegung um eine der beiden Axen, wäre nach Hülfsatz II nebst Zusatz äquivalent der zweizähligen Bewegung um eine mitten zwischen beiden Axen verlaufende parallele Axe, welche also nach Hülfsatz IX die Axe einer Deckbewegung wäre. Eine solche Axe ist jedoch nach dem vorigen Satze unmöglich. Also sind jene Axen undeckbar, d. h. ungleich.

Erklärung. *In einem Punktsystem, dessen Axen in lauter parallelen Geraden verlaufen, heisse Elementardreieck ein in einer Hauptebene liegendes Dreieck, das durch 2 nächste Hauptaxen vom Abstand a' und durch diejenige dritte Hauptaxe bestimmt ist, die so liegt, dass das entstehende Dreieck einen möglichst kleinen Umfang hat. Z. B. $AA'A''$ in Fig. 16,*

ABB' in Fig. 17, ABC in Fig. 18 und 19. Diese 3 Hauptaxen sind im Allgemeinen ungleich. Bei zweizähligen Axen sind zwei Seiten des Elementardreiecks $= a'$ und a'' , die dritte heiße a''' . Ferner ist hier $e' = 2a'$, $e'' = 2a''$, $e''' = 2a'''$. Vgl. Fig. 19. — Die ganze Hauptebene ist mit lückenlos aneinanderliegenden Elementardreiecken erfüllt.

Elementarparallelogramm heisst ein aus 2 aneinanderliegenden Elementardreiecken gebildetes Parallelogramm. Bei ein und demselben Punktsystem mit zweizähliger Hauptaxe kann es im Allgemeinen 3 verschiedene Gestalten haben, weil zur Herstellung des Parallelogramms das zweite Dreieck an jede der 3 Seiten des ersten Elementardreiecks angelegt werden kann. (CDB_1A_1 , CDA_1B_1' , A_1CBD in Fig. 19.)

§ 10. Allgemeine Sätze über Punktsysteme mit einer einzigen Axenrichtung.

Satz 42. *In Punktsystemen mit Hauptaxen von einer einzigen Richtung existirt eine Deckschiebung, deren Projektion auf die Hauptebene mit dem Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfällt.*

Beweis. In den Systemen mit 3-, 4-, oder 6-zähliger Hauptaxe ist die Anordnung der Axen nach § 9 (1, 2, 3) eine solche, dass in der Hauptebene 2 nächste gleiche Hauptaxen die Grundlinie e eines gleichschenkligen Dreiecks bestimmen, dessen Winkel an der Spitze gleich dem die Hauptaxe charakterisirenden Drehwinkel ist, und dessen Spitze selbst durch eine, nur bei sechszähligen Axen mit den vorigen gleiche, Hauptaxe H hindurchgeht. Bei zweizähliger Hauptaxe rückt die Spitze in die Mitte der Basis hinein (§ 9, 4). Nun ist die n -zählige Schraubung um die durch die Spitze gehende Axe H nach Hülfsatz II nebst Zusatz äquivalent einer gleichen und gleichsinnigen Schraubung um die durch eine Basisecke gehende Axe H' , gefolgt von einer Schiebung parallel und gleich der Basis e . Die charakteristische Deckbewegung um H' ist im Allgemeinen nicht identisch mit der im vorliegenden Falle um H' auszuführenden Schraubung; jedoch haben beide dieselbe Drehungskomponente. Also kann man die verlangte Schraubung ersetzen durch die für H' charakteristische Schraubung und eine

gewisse Schiebung längs der Axe. Letztere Schiebung setzt sich mit der parallel zur Basis des Dreiecks auszuführenden Schiebung e zusammen zu einer einzigen (nach Hilfssatz I), deren Projektion auf die Hauptebene mit e zusammenfällt. Also ist die gegebene Schraubung um H äquivalent mit der charakteristischen Schraubung um H' , nebst einer Schiebung, deren Projektion auf die Hauptebene $= e$ ist. Erstere beide Schraubungen sind Deckbewegungen des Systems, also ist (nach Hilfssatz IX) auch diese Schiebung eine Deckbewegung.

Zusatz 1. *Bei zweizähliger Hauptaxe existiren Deckschiebungen, deren Projektionen auf die Hauptebene mit den verdoppelten Seiten des Elementardreiecks (siehe Seite 74 und 75) e' , e'' , e''' zusammenfallen.*

Zusatz 2. *Wenn die durch die Spitze und die Grundecken des gleichschenkligen Dreiecks (vergl. Beweis des Satzes 42) gehenden Hauptaxen einander gleich sind, — was nur bei 6-zähliger Hauptaxe der Fall ist, — so ist die Dreiecksbasis selber eine Deckschiebung.*

Beweis. Denn dann sind die charakteristischen Schraubungen um H und H' einander gleiche Deckbewegungen.

Satz 43. *Eine Deckschiebung, deren Projektion auf die Hauptebene kleiner als die Entfernung e zweier nächsten gleichen Hauptaxen wäre, ist unmöglich.*

Beweis. Denn eine solche würde zu den vorher ermittelten noch neue Lagen der Hauptaxe fordern, was unmöglich ist.

Satz 44. *Der Abstand eines Systempunkts P von der nächsten Hauptaxe A kann nicht grösser als der Radius r des um das Elementardreieck beschriebenen Kreises sein.*

Beweis. Weil eine Hauptebene durch lückenlos aneinanderliegende Elementardreiecke erfüllt wird, so muss ein beliebiger Systempunkt P entweder in die Fläche oder auf die Umgrenzung eines Elementardreiecks der durch P gelegten Hauptebene fallen. Liegt P im Mittelpunkt des um das Elementardreieck beschriebenen Kreises, so ist sein Abstand von jeder der 3 nächsten Hauptaxen $= r$; liegt P aber nicht im Mittelpunkt, so muss es sich in einem der 3 das Elementardreieck zusammensetzenden Theildreiecke befinden, welche 2 Radien und eine Elementardreiecksseite zu Seiten haben. Dann ist die Summe seiner Abstände von den 2

nächsten Ecken des Elementardreiecks $< 2r$; also einer dieser beiden Abstände jedenfalls $< r$.

Zusatz. *Bei Systemen mit 6-, 4-, 3-zähliger Hauptaxe ist der Radius des um das Elementardreieck beschriebenen Kreises bezüglich $= \frac{e}{\sqrt{3}}, \frac{e}{2}, \frac{e}{3}$, wo e den Abstand zweier nächsten gleichen Hauptaxen bedeutet (Fig. 16, 17, 18).*

Nämlich das Elementardreieck ist bei Systemen mit sechszähliger Hauptaxe gleichseitig und hat die Seite e ; bei Systemen mit vierzähliger Hauptaxe ist es rechtwinklig gleichschenkelig und hat die Seiten a, a und e , wo a der Abstand zweier nächsten (und zwar ungleichen) Hauptaxen; bei Systemen mit dreizähliger Hauptaxe ist es gleichseitig, jedoch von 3 ungleichen Hauptaxen gebildet (Seite a), und e ist = der doppelten Höhe dieses Dreiecks.

Satz 45. *In Punktsystemen mit einer einzigen Axenrichtung können alle Systempunkte nur auf den Mänteln von Kreiscylindern liegen, die mit gleichen Radien um die eine Art von Hauptaxen konstruirt sind.*

Beweis. P sei ein Punkt des Systems, und A die ihm nächste Hauptaxe, der Abstand beider heisse AP . Dann folgt aus der Regelmässigkeit des Systems, dass bei jedem Systempunkt eine gleiche Hauptaxe A in gleicher Entfernung AP vorübergehn muss. In kleinerer Entfernung kann bei keinem Punkt eine gleiche Hauptaxe vorübergehn; sonst müsste dies ja auch bei P der Fall sein, und dies ist gegen die Voraussetzung. Daher befinden sich alle Systempunkte in denselben Abständen AP von gleichen Hauptaxen, also auf den Mänteln von Kreiscylindern um sie.

Satz 46. *Die Projektionen sämtlicher Punkte eines unbegrenzten regelmässigen „Punktsystems mit n -zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung“ auf eine Hauptebene bilden die Ecken von lauter parallelen kongruenten regulären n -ecken, deren Centra in den Schnittpunkten der einen Art von Hauptaxen A liegen. Im Falle zweizähliger Hauptaxen treten für die n -ecke begrenzte gerade Linien (Zweiecke) ein. (Fig. 20 und 21.)*

Beweis. Weil alle Systempunkte auf den Mänteln gleicher Cylinder um die eine Art von Hauptaxen liegen (Satz 45), so müssen sich die Projektionen sämtlicher Punkte auf eine Hauptebene auf den Peripherien gleicher Kreise befinden, die

um die Schnittpunkte dieser Art von Hauptaxen mit dem Radius AP beschrieben sind. Zugleich erhellt aus dem Beweise des vorigen Satzes, dass kein Abstand eines Systempunktes von einer Hauptaxe vorkommt, der kleiner wäre als der Radius dieser Kreise. — Durch wiederholte Ausführung der charakteristischen n -zähligen Bewegung um eine dieser Hauptaxen entspringen aus einem anfänglich gegebenen Systempunkt noch andere Systempunkte, deren Projektionen sämtlich in die Ecken eines regulären n -ecks (oder bei $n = 2$ in die Endpunkte eines Durchmessers) fallen. So müssen alle Schnittpunkte gleicher Hauptaxen mit Projektionspunkten umgeben sein, welche lauter regelmässige kon-

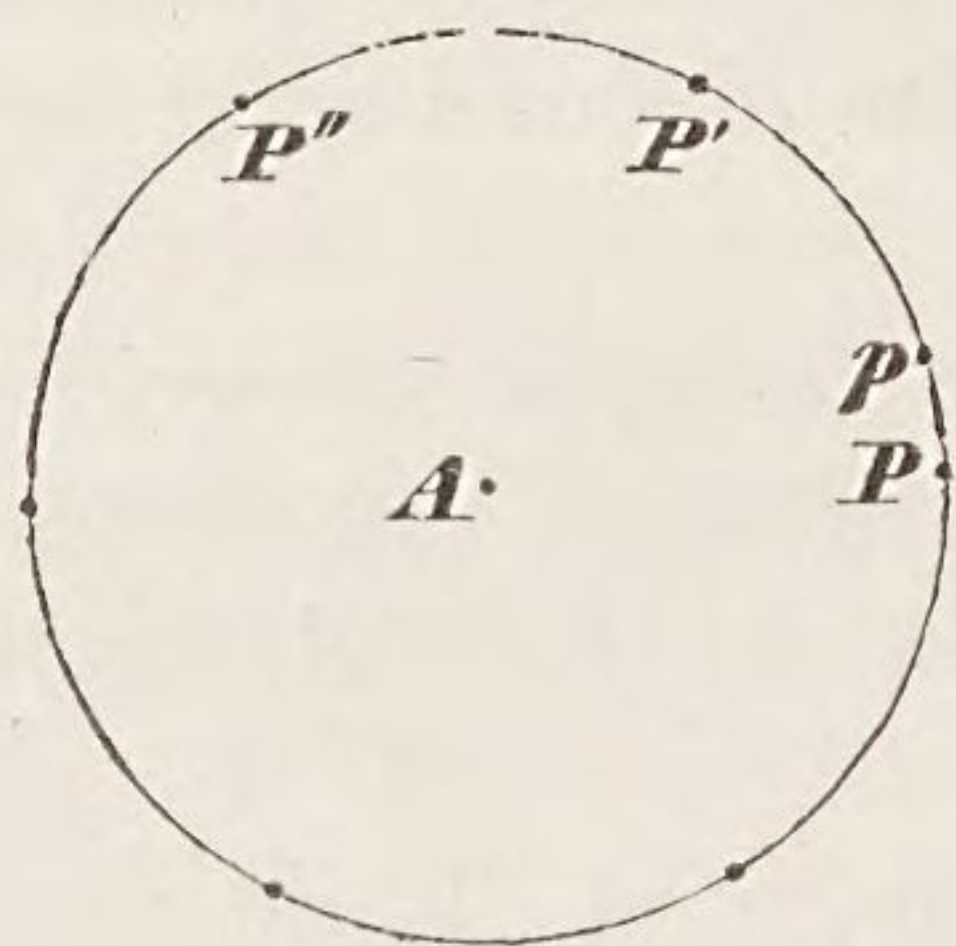


Fig. 20.

gruente n -ecke bestimmen. Diese n -ecke stehn sämtlich parallel, denn nach Satz 42 besitzt das System Deckschiebungen, deren Projektionen auf eine Hauptebene mit den Abständen e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfallen. — Hiernach bleibt nur noch zu beweisen, dass das System keinen Punkt enthält, der sich anderswohin als in einen Eckpunkt eines solchen n -ecks

projicirt. Angenommen es gäbe solch einen anderen Systempunkt, so muss seine Projektion p doch jedenfalls auf eine der Kreisperipherien fallen; und P sei der nächste Eckpunkt des demselben Kreise zugehörigen regulären n -ecks. In Folge der Regelmässigkeit des Systems müssen sich nun 2 solche Systempunkte, von denen P und p die Projektionen sind, zur Deckung bringen lassen, so dass zugleich das ganze bewegliche System mit dem festen zur Deckung kommt. Die dazu erforderliche Deckbewegung ist nun jedenfalls keine n -zählige Bewegung um die nächste Hauptaxe, denn der Bogen Pp ist $< \frac{2\pi}{n}$. Noch weniger ist die Deckung durch n -zählige Schraubung um eine entferntere Hauptaxe erreichbar, weil der alsdann anzuwendende Drehwinkel noch kleiner sein müsste. Wollte man aber eine Schraubung um eine der minderzähligen Axen anwenden, so führte diese die Hauptaxe A in eine andere Lage A' , und die sämtlichen auf ihrem Cylindermantel gelegenen Systempunkte in die ent-

sprechend um A' gelegenen Punkte. Wäre nun hierbei auch wirklich P in p geführt, so wäre doch p als zu dem um A' konstruirten n -eck gehörig anzusehn, so dass dennoch die ganze Projektionsfigur nur aus kongruenten n -ecken um die eine Art von Hauptaxen bestände, und p kein neu hinzukommender Punkt wäre. — Nachdem so gezeigt ist, dass keine mit Drehung verbundene Bewegung die Punkte P und p zur Deckung bringen kann, bleibt als Deckbewegung nur noch eine Schiebung übrig, deren Projektion auf die Hauptebene $= Pp$ ist. Diese Möglichkeit wird zunächst bei Systemen mit 6-, 4-, oder 3-zähliger Hauptaxe zurückgewiesen, nachher erst bei denen mit zweizähliger. Bei den erstgenannten Systemen kann $\overline{Pp}$ höchstens gleich der Seite des regulären 12-, 8- oder 6-ecks sein, das in den Kreis mit Radius AP eingeschrieben ist; also kann hier Pp nicht grösser als AP sein. AP aber ist nach Satz 44 höchstens $= r$, und somit (44, Zusatz) höchstens bezüglich $= \frac{e}{\sqrt{3}}, \frac{e}{2}, \frac{e}{3}$, also sicher $< e$. Somit wäre jene Deckschiebung eine solche, deren Projektion auf die Hauptebene kleiner als e wäre; und das ist nach Satz 43 unmöglich. — Bei Systemen mit zweizähliger Hauptaxe muss die fragliche Deckschiebung die durch eine und dieselbe Gerade L gehenden Axen entweder mit den gleichen durch L_1 gehenden Axen, oder mit sich selbst zur Deckung bringen (vergl. Fig. 19); denn neue Axenlagen sind ausgeschlossen. Nun kann Pp höchstens gleich der Seite des in den Kreis mit Radius r eingeschriebenen Quadrats, d. h. $= r \cdot \sqrt{2}$, sein. Es ist aber die kleinste Schiebung, welche die Axen auf L mit denen auf L_1 zur Deckung bringt, $= 2a''$. Und es ist $2r < a' + a''$, also erst recht $< 2a''$; also ist $r \cdot \sqrt{2} < 2a''$. Folglich ist Pp nicht gross genug, um eine Deckschiebung sein zu können, die L in L_1 überführt. Sollte schliesslich Pp eine solche Deckschiebung sein, welche die durch ein und dieselbe Linie L gehenden Axen mit sich zur Deckung bringt, so müsste sie parallel L und $= m \cdot e' = m \cdot 2a'$ sein, wo m eine ganze Zahl. Projicirt man jetzt (Fig. 21) P und p orthogonal auf L , so sind die

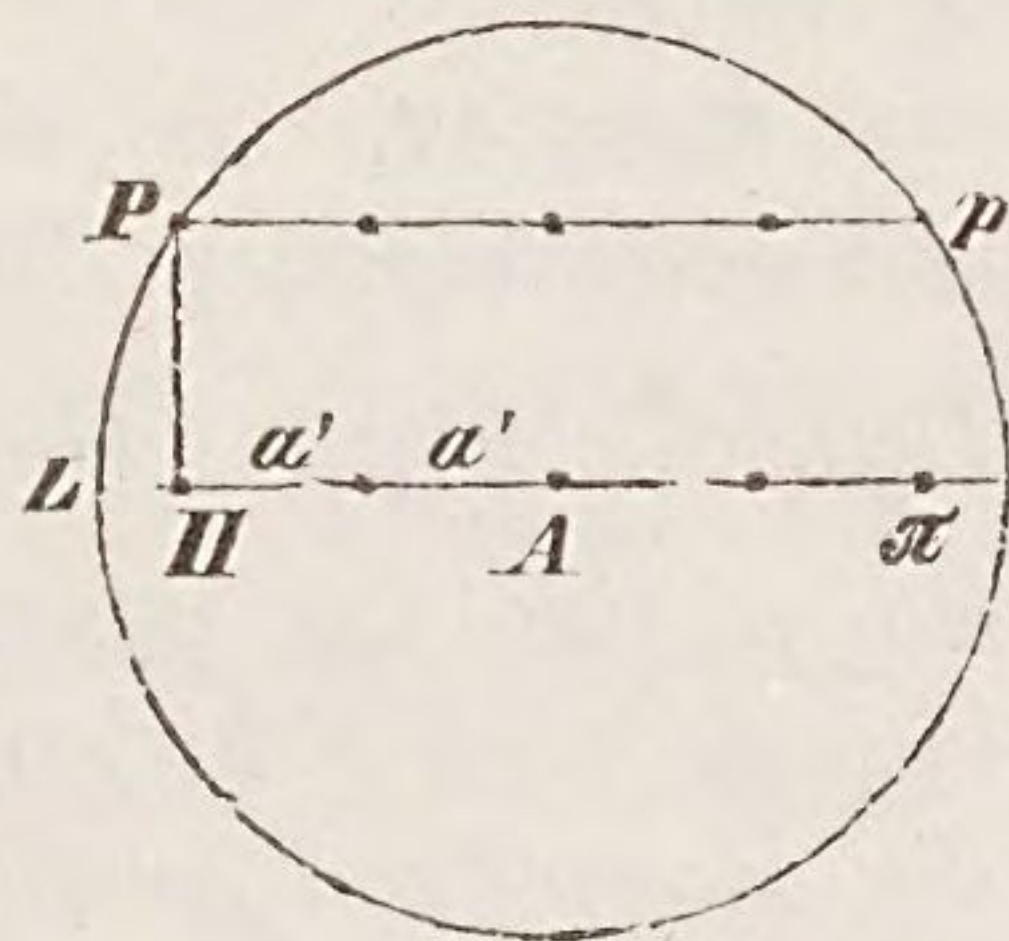


Fig21..

Projektionen Π und π beiderseits um $m \cdot a'$ vom Kreiscentrum A entfernt, müssen also in dort vorhandene Axenschnitte A oder B fallen. Weil nun $P\Pi < PA$, so wäre nicht A , sondern die durch Π gehende Axe die nächste Hauptaxe an P ; und das ist gegen die Voraussetzung. Hiernach ist auch bei zweizähliger Hauptaxe kein anderer Systempunkt möglich als ein solcher, der sich in die Ecken des n -ecks, welches hier ein Zweieck ist, projecirt.

Erklärung. Führt man die Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ wiederholt aus, so wird ein Anfangs in's Auge gefasster Systempunkt, dessen Abstand von der Axe A so klein als möglich ist, nacheinander in Lagen geführt, die so auf einer Schraubenlinie liegen, dass sich je n äquidistante Punkte auf einem Schraubenumfang befinden. Nun soll die Gesammtheit aller Punkte, die durch beliebig oft zu wiederholende Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ aus einem so nah als möglich bei der Axe

A gelegenen Punkt hervorgehn, eine n -punktenschraube heissen. In einer solchen ist der Abstand irgend eines Punktes von dem $n + 1$ ten auf ihn folgenden Punkte parallel der Axe und $= n \cdot l$; er misst die Höhe eines Schraubenganges. — Um einen bestimmten Fall im Auge zu haben, setze man die Schraubung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ immer als *rechtsgewunden* voraus; und

zwar heisse, übereinstimmend mit dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, *rechtsgewunden* eine solche Schraube, die (für einen Beobachter, der mit seiner Längsaxe in der Schraubenaxe liegt) durch Umlauf eines Punktes im Uhrzeigersinn, unter gleichzeitiger Senkung des Punktes, beschrieben wird. Ein negativer Werth der Schiebungskomponente l entspricht also einer *Hebung*, bei Umlauf im Uhrzeigersinn, d. h. einer *Links-schraube*.

Satz 47. In einem Punktsystem mit n -zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung giebt es zur Axenrichtung parallele Deckschiebungen. Die kleinste derselben hat die Grösse $\lambda = \frac{n \cdot l}{p}$, wo p eine der ganzen Zahlen $1, 2, 3, \dots, n$ ist, und l die kleinste aller Schiebungskomponenten bedeutet, welche zu den um die Hauptaxen ausführbaren Deckschraubungen gehören.

Beweis. Die n -zählige Deckschraubung mit kleinster zu-

gehöriger Schiebungs-komponente sei $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$; dann existirt um jede Hauptaxe A eine n -punktschraube. Nun seien unter allen Punkten des Systems, deren Projektionen auf die Hauptebene in ein und dieselbe Ecke eines regulären n -ecks fallen (vergl. Satz 46), 2 nächste um λ voneinander entfernt. Dann ist die einzige Deckbewegung, welche einen dieser Punkte in den anderen zu führen vermag, die der Axe parallele Schiebung λ . Führt man diese Deckschiebung λ hinreichend oft nacheinander aus (p mal), so muss ein in's Auge gefasster Punkt schliesslich einmal gerade die Höhe eines Schraubengangs durchlaufen haben. Denn um die Schraubenhöhe vom Ausgangspunkt P entfernt befindet sich (nach den Bemerkungen zur vorhergehenden Erklärung) ein Punkt Q des Systems; derjenige Punkt nun, der durch p -malige Schiebung λ aus P hervorgegangen ist, kann von Q nicht um *mehr* als λ abstehn, sonst hätte man die Deckschiebung λ nur noch nicht oft genug (oder schon zu oft) ausgeführt; er kann aber von Q auch nicht um weniger als λ abstehn, sonst wäre λ nicht mehr die kleinste Deckschiebung in dieser Richtung, was doch vorausgesetzt war. Also muss

$$p \cdot \lambda = n \cdot l$$

sein, wo $n \cdot l$ die Höhe des Schraubenganges ist. Wäre nun die ganze Zahl $p > n$, so hätte die den 2 Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ und $-\lambda$ zusammen äquivalente Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{n}, l-\lambda'}$ d. h. $A_{\frac{2\pi}{n}, l - \frac{n}{p}l}$ eine Schiebungs-komponente, die kleiner als l wäre; und das ist gegen die Voraussetzung.

Zusatz 1. *Folglich stehn um alle Hauptaxen der einen Art die ihr nächsten Systempunkte in der Weise herum, dass jede Kante eines über einem regelmässigen n -eck stehenden geraden Prismas in gleichen Abständen λ mit Systempunkten besetzt ist. Die Gesammtheit der Punkte auf einem solchen Prisma bildet p kongruente n -punktschrauben, die auf demselben Cylindermantel, gleichweit voneinander abstehend, ineinander gewunden sind. Und weil (nach Satz 42) stets eine Deckschiebung existirt, deren Projektion auf eine Hauptebene in den Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen fällt, so sind alle inein-*

ander gewundenen Schrauben des einen Cylindermantels parallel den entsprechenden jedes anderen Cylindermantels.

Zusatz 2. Aus den Sätzen 46 und 47 folgt unmittelbar, dass andere Punkte als die im vorigen Zusatz 1 aufgezählten, in Systemen mit einer einzigen Axenrichtung überhaupt unmöglich sind.

§ 11. Konstruktion der Systeme mit sechszähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{6}, l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung

auf eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus den Ecken kongruenter paralleler regelmässiger Sechsecke, deren Mitten in den Hauptaxen liegen, und daher nach Satz 26 (Fig. 16) ein Netz von gleichseitig dreieckigen Maschen bilden. Alle Sechsecke können in der Hauptebene beliebig um ihre Mitten gedreht werden, wofern sie nur untereinander parallel bleiben (Fig. 22). Die Punkte, welche auf dem eine Hauptaxe zunächst umgebenden Cylindermantel liegen, gehn durch die parallel einer Maschenseite ausgeführte *Schiebung* c ($= a$),

welche nach Zusatz 2 zu 42 eine Deckbewegung ist, in die entsprechenden Punkte auf dem Cylindermantel der Nachbaraxe über. Also befinden sich die Systempunkte aller Cylindermäntel in gleicher Lage gegen eine und dieselbe Hauptebene. — Für die der *Axe* parallele kleinste *Deckschiebung* λ gilt nach Satz 47 die Gleichung:

$$p \cdot \lambda = .6l.$$

Wenn man hier p nacheinander die Werthe 1, 2, ... 6 giebt, erhält man 6 verschiedene Systeme.

1) Bei $p = 1$ wird $l = \frac{\lambda}{6}$; also sind die dieses Punktsystem charakterisirenden Deckbewegungen folgende: $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{6}}$,

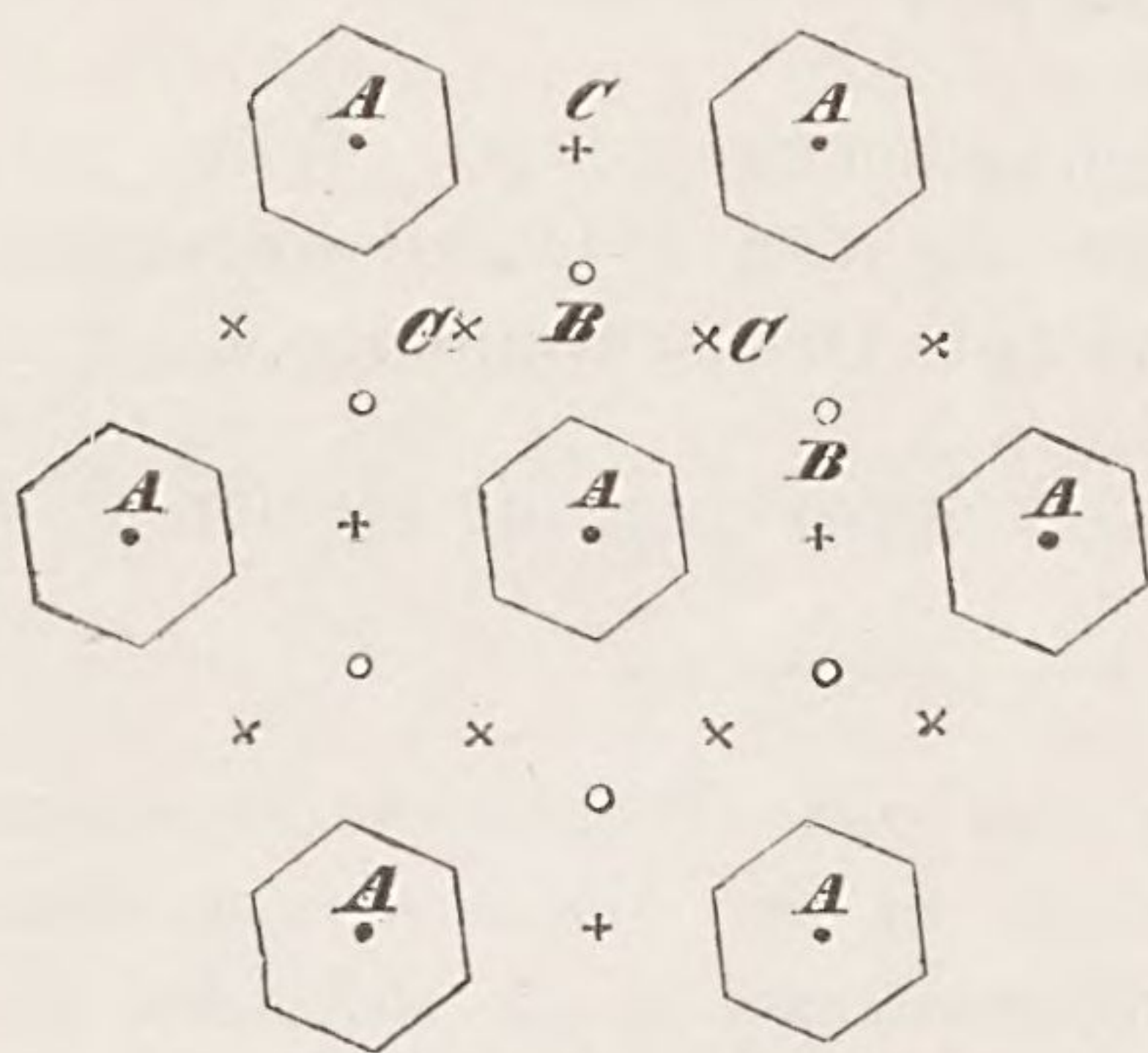


Fig. 22.

λ, e . Die beiden ersten dieser Deckbewegungen charakterisieren eine einfache Sechspunktschraube. Das somit abgeleitete *rechte 6-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. III. Fig. 42) besteht aus lauter parallelen kongruenten 6-punktschrauben, die sich durch eine senkrecht zur Axe ausgeführte Schiebung $e (= a)$ zur Deckung bringen lassen, und deren Axen in der Hauptebene ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bestimmen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten Punktgittern von gleichseitig dreieckiger Masche besetzt. Die Deckbewegungen um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$.

2) Bei $p = 2$ wird $l = \frac{2\lambda}{6}$; es entsteht das *zweigängige rechte 6-punktschraubensystem*²⁾ (Taf. IV. Fig. 44) mit den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e$.

Hiervon charakterisieren die beiden ersten (nach Satz 47, Zusatz) 2 kongruente ineinander gewundene 6-punktschrauben mit der Schraubenhöhe 2λ , ausgehend von 2 diametral gegenüber liegenden Punkten des Schraubencylinders, so dass mitten zwischen je 2 um die Schraubenhöhe von einander abstehenden Punkten der einen Schraube ein Punkt der anderen liegt. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt, doch ist jede folgende gegen die vorhergehende um 60° um eine sechszählige Axe gedreht. Während also die eine Hauptebene mit Punktpaaren 1, 1 besetzt ist, gelegen wie die Endpunkte der einen Schaar paralleler grosser Durchmesser der Projektionssechsecke, so tragen die beiden folgenden Hauptebenen Punktpaare 2, 2 und 3, 3, gelegen wie die Endpunkte der zweiten und dritten Durchmesserschaar. Die Hauptaxen A sind zugleich zweizählige Drehungsaxen; die Deckbewegungen um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ und $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) Bei $p = 3$ wird $l = \frac{3\lambda}{6}$; es entsteht das *dreigängige 6-punktschraubensystem*³⁾ (Taf. IV. Fig. 46) mit den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e$. Hier-

1) früher: rechtes sechszähliges Schraubensystem.

2) früher: Wendeltreppensystem.

3) früher: Sternsäulensystem.

von charakterisiren die beiden ersten 3 kongruente ineinander gewundene 6-punktschrauben mit der Schraubenhöhe 3λ , ausgehend von den auf dem Schraubencylinder liegenden Ecken eines, in eine Hauptebene fallenden, gleichseitigen Dreiecks, so dass die Höhe eines Schraubenganges durch 2 zwischenliegende Punkte der beiden anderen Schrauben gedritttheilt wird. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt; die abwechselnden von ihnen tragen Punkte in den Ecken von kongruenten parallelen gleichseitigen Dreiecken, deren Mitten in den Hauptaxen liegen; die zwischenliegenden tragen ebensolche Dreiecke, jedoch um 60° gegen die vorige Lage gedreht. Die Hauptaxen A sind zugleich dreizählige Drehungsaxen; die Deckbewegungen um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$.

4) Bei $p = 4$ wird $l = \frac{4\lambda}{6}$. Von den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{2\lambda}{3}}$, λ , e charakterisiren die beiden ersten 4 kongruente ineinander gewundene 6-punktschrauben; jedoch lassen die letzteren sich noch einfacher auffassen. Man setze nämlich die beiden Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{2\lambda}{3}}$ und $-\lambda$ zu einer einzigen: $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{2\lambda}{3} - \lambda}$ oder $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{3}}$ zusammen, so erscheinen folgende Deckbewegungen als die das System charakterisirenden: $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{3}}$, λ , e . Sie unterscheiden sich von denen des zweigängigen rechten 6-punktschraubensystems nur dadurch, dass die Schiebungskomponente der Schraubung negativ ist, wodurch eine Schraubung von entgegengesetztem Windungssinn als vorher charakterisirt ist. Um jede Hauptaxe finden sich also zwei 6-punktschrauben linken Windungssinnes ineinandergewunden; somit ist das System das

zweigängige linke 6-punktschraubensystem. Abgesehn vom Windungssinne der Schrauben stimmt es mit dem zweigängigen rechten Schraubensystem völlig überein.

5) Bei $p = 5$ wird $l = \frac{5\lambda}{6}$. Von den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{5\lambda}{6}}$, λ , e charakterisiren die beiden ersten 5 kongruente ineinandergewundene 6-punktschrauben. Indem

aber durch Zusammensetzung der Schraubung mit der Deck-
schiebung $-\lambda$ eine Schraubung $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{6}}$ als Deckbewegung

resultirt, so zeigen sich folgende Deckbewegungen als die
charakteristischen: $A_{\frac{2\pi}{6}, -\frac{\lambda}{6}}, \lambda, e$. Das hiermit charakterisirte

System ist das

linke 6-punktschraubensystem. Es besteht aus lauter kon-
gruenten parallelen einfachen 6-punktschrauben von linkem
Windungssinn. Abgesehn vom Windungssinn der Schrauben
stimmt es mit dem rechten Schraubensystem völlig überein.

6) Bei $p = 6$ wird $l = \lambda$; es entsteht das

*Hexagonalsäulensystem*¹⁾ (Taf. IV. Fig. 47). Nämlich
von den charakteristischen Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, \lambda}, \lambda, e$ kann

man die erste mit der negativ genommenen zweiten zu einer
einzigen Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{6}, \lambda - \lambda}$ oder $A_{\frac{2\pi}{6}, 0}$ zusammenfassen,

welche nichts anderes als eine sechszählige Drehung ist. Also
sind jetzt die charakteristischen Bewegungen $A_{\frac{2\pi}{6}, 0}, \lambda, e$.

Statt also jede Hauptaxe von 6 ineinandergewundenen 6-punkt-
schrauben umgeben anzusehen, fasst man das System ein-
facher als aus Punkten gebildet auf, welche die Kanten von lau-
ter kongruenten, parallelen, sechsseitigen Prismen in gleichen
Abständen und immer bei allen in gleicher Höhe über einer
und derselben Hauptebene besetzen. Die Hauptebenen sind
kongruent besetzt; alle tragen zu regulären kongruenten Sechs-
ecken angeordnete Punkte. Fig. 47 auf Taf. IV stellt un-
mittelbar eine solche Hauptebene vor. — Die Deckbewegungen
um die anderen Axen sind $B_{\frac{2\pi}{3}, 0}, C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) und 2) Rechtes und linkes 6-punktschraubensystem.
 $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm \frac{\lambda}{6}}, \lambda, e$.

3) und 4) Rechtes und linkes zweigängiges 6-punkt-
schraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e$.

1) früher: System der sechsseitigen Säule.

5) Dreigängiges Sechspunktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}, \lambda, e}$.

6) Hexagonalsäulensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, 0, \lambda, e}$.

§ 12. Konstruktion der Systeme mit vierzähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{4}, l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung auf eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus den Ecken kongruenter paralleler Quadrate, deren Mitten in der einen Art von Hauptaxen A liegen, und daher nach Satz 29 (Fig. 17) ein Netz von quadratischen Maschen bilden. Alle Quadrate können in der Hauptebene beliebig um ihre Mitten gedreht werden, wofern sie nur unter einander parallel bleiben (Fig. 23). Für die der Axe parallele kleinste Deckschiebung λ gilt nach Satz 47 die Gleichung

$$p \cdot \lambda = 4 \cdot l,$$

worin p nacheinander die Werthe 1, 2, 3, 4 annehmen kann.

1) Bei $p = 1$ wird $l = \frac{\lambda}{4}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$

und λ charakterisiren eine Vierpunktschraube (Taf. II. Fig. 26).

2) Bei $p = 2$ wird $l = \frac{2\lambda}{4}$.

Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$ und

λ bestimmen 2 ineinandergewundene kongruente 4-punktschrauben mit der Schraubenhöhe 2λ , ausgehend von 2 diametral gegenüber liegenden Punkten des Schraubencylinders. Die Verbindungslinie des um $\frac{\lambda}{2}$ höher

gelegenen Punktpaars kreuzt die Verbindungslinie des Ausgangspaars rechtwinklig im Raum (Taf. III. Fig. 29).

3) Bei $p = 3$ wird $l = \frac{3\lambda}{4}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{3\lambda}{4}}$

und λ charakterisiren eine entgegengesetzt gewundene, also

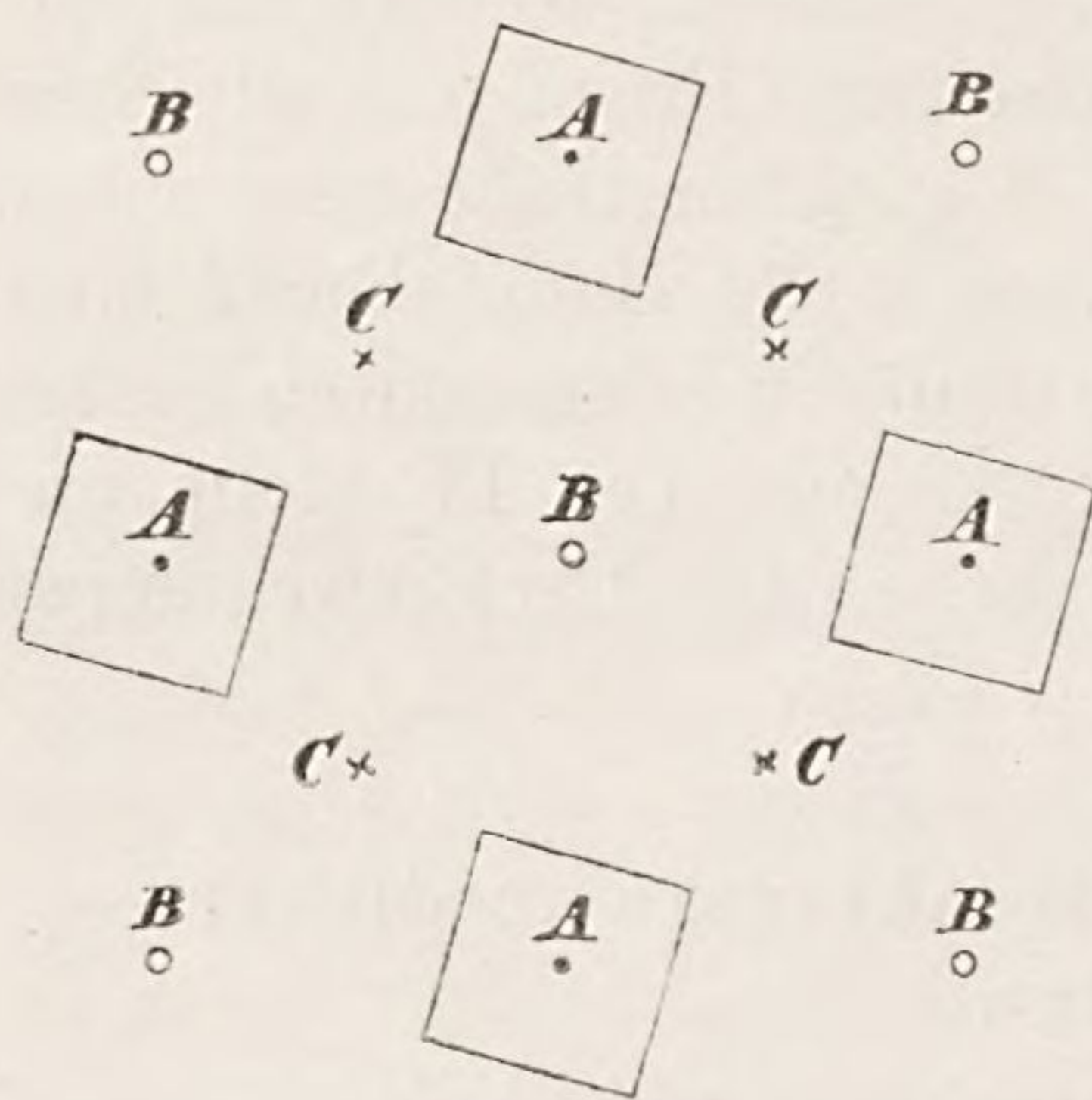


Fig. 23.

linke Vierpunktschraube; denn die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit der Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{3\lambda}{4}}$ zu der Deckschraubung

$A_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}$ zusammen.

4) Bei $p = 4$ wird $l = \lambda$. Die Bewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \lambda}$ und λ charakterisiren die Ecken einer quadratischen Säule. Nämlich die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit $A_{\frac{2\pi}{4}, \lambda}$ zu der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$ zusammen, welche eine Drehung ist.

In jedem dieser Fälle sind zwar die ineinandergewundenen 4-punktschrauben des einen Cylindermantels den entsprechenden eines jeden anderen parallel (Zusatz 1 zu 47); indessen ist die Stellung der Schrauben der verschiedenen Cylindermäntel gegeneinander dadurch noch nicht genügend bestimmt; sie wird jetzt ermittelt. Die Anwendung von Hilfssatz II nebst Zusatz auf 2 gleiche nächste Hauptaxen A lehrt, in Verbindung mit Hilfssatz IX, dass eine zur Axe senkrechte Schiebung $2a$ (welche die Basis eines durch 3 Axen A bestimmten gleichschenkelig rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten $e, e, 2a$ ist), eine Deckbewegung ist (Fig. 17). Daraus folgt, dass die Cylindermäntel aller abwechselnden gleichen Hauptaxen A mit Punkten besetzt sind, die sich in einerlei Lage gegen eine und dieselbe Hauptebene befinden. Also ist auch die senkrecht zur Axenrichtung auszuführende Schiebung $2e$, welche 2 abwechselnde gleiche Hauptaxen A ineinanderführt, eine Deckbewegung.

Es erübrigt noch, die Stellung der Schrauben auf den Cylindermänteln der einen Hälfte gleicher Hauptaxen A gegen diejenigen auf der anderen Hälfte zu ermitteln. Das gelingt so (Fig. 24). Nach Satz 42 existirt eine Deckschiebung s , deren Projektion auf eine Hauptebene mit dem Abstände e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfällt. Ihre Projektion auf die Axenrichtung heisse c . Nun ist mit der Deckschiebung $2s$ äquivalent die Reihenfolge der beiden Schiebungen $2e$ und $2c$ (Hilfssatz I). Weil aber, wie eben gezeigt, $2e$ ebenfalls eine Deckbewegung ist, so ist (nach Hilfssatz IX) auch $2c$ eine

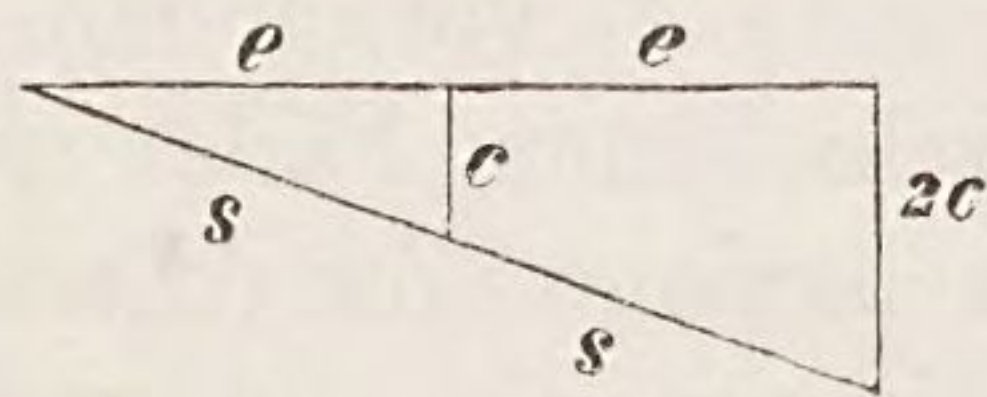


Fig. 24.

Deckbewegung. Andererseits ist λ als kleinste, der Axe parallele, Deckschiebung bekannt. Also muss

$$2 \cdot c = q \cdot \lambda, \text{ d. h. } c = \frac{q}{2} \cdot \lambda$$

sein, wo q eine ganze Zahl oder 0. a) Ist nun q eine gerade Zahl oder 0, so wird c ein ganzes Vielfaches von λ , oder 0, und folglich ist dann c selbst eine Deckschiebung. Weil jetzt von den beiden Komponenten c und e der gegebenen Deckschiebung s die eine als Deckbewegung erkannt ist, so muss (nach Hilfssatz IX) auch die andere eine sein. In diesem Falle ist also der Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen eine Deckschiebung. Da die der Axe parallele Komponente derselben $= 0$ ist, so lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = 0$ darstellen.

b) Ist ferner q eine ungerade Zahl $= 2r + 1$, so führe man nacheinander die beiden Deckschiebungen s und $-r\lambda$ aus; sie sind zusammen äquivalent einer gewissen Deckschiebung σ , deren zur Axe parallele Komponente $= \frac{2r+1}{2} \lambda - r\lambda$, d. h. $= \frac{\lambda}{2}$ ist, während die in die Hauptebene fallende Komponente $= e$ ist. Keine dieser beiden Komponenten ist für sich eine Deckbewegung, sondern nur die ihnen äquivalente Bewegung σ . Weil die der Axe parallele Komponente derselben $= \frac{\lambda}{2}$ ist, so lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = \frac{\lambda}{2}$ darstellen.

In jedem der vorher ermittelten 4 Fälle (wo 1 bis 4 Schrauben ineinandergewunden sind), kann nun entweder die Deckschiebung e (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = 0$), oder eine Deckschiebung σ (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = \frac{\lambda}{2}$, und der in die Hauptebene fallenden Komponente e) vorhanden sein. Die somit sich ergebenden 8 verschiedenen Fälle reduciren sich auf nur 6 wesentlich verschiedene. Zum Zweck dieser Reduktion ist es nützlich, auch die um die anderen Hauptaxen B vorhandenen Deckschraubungen zu ermitteln. Die 2 Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, l}$ und σ (mit den Komponenten c und e) sind, nach Hilfssatz II nebst

Zusatz, zusammen äquivalent einer Deckschraubung $B_{\frac{2\pi}{4}, l+c}$,

und weil c nur die Werthe 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ haben kann, und auch $\pm \lambda$ eine der Axe parallele Deckschiebung ist, so existirt um B jedenfalls die Deckbewegung $B_{\frac{2\pi}{4}, l \pm c}$. Hiernach hat man folgende Fälle.

1 a) $p = 1, c = 0$. Die charakteristischen Deckbewegungen sind $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}, \lambda, e}$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$); sie bestimmen das

*rechte Vierpunktschraubensystem*¹⁾ (Taf. II. Fig. 26). Es besteht aus lauter parallelen kongruenten 4-punktschrauben, die sich durch senkrecht zur Axe ausgeführte Schiebungen e zur Deckung bringen lassen; ihre Axen bestimmen in der Hauptebene ein Netz quadratischer Maschen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten Punktgittern von quadratischer Masche besetzt. Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$.

1 b) $p = 1, c = \frac{\lambda}{2}$. Die charakteristischen Deckbewegungen sind $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}, \lambda, \sigma}$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}$); sie bestimmen das

vierzählige Gegenschraubensystem (Taf. II. Fig. 28). Es lässt sich ansehen als aus 2 kongruenten Schraubensystemen bestehend, die parallelaxig so ineinanderstehn, dass die Schraubenaxen des einen mitten zwischen je 4 solchen des anderen verlaufen, und dass das eine System gegen das andere um die halbe Schraubenhöhe gehoben ist. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt und folgen in Abständen $\frac{\lambda}{4}$ aufeinander; jede trägt 2 kongruente parallele, beliebig ineinander gestellte, quadratmaschige Punktgitter, doch ist die Besetzung jeder folgenden gegen die vorige um 90° gedreht. Die Symbole der Deckschraubungen um A und B zeigen, dass beide Schraubungen entgegengesetzten Windungssinn haben. In der That bemerkt man in Taf. II. Fig. 28, dass die einander zugewandten Punkte von 4 zunächst um B herumstehenden Schrauben A eine entgegengesetzt gewundene Vierpunkt-

1) früher: rechtes vierzähliges Schraubensystem.

schraube um B bilden, mit derselben Schraubenhöhe wie die vorigen. — Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

2a) $p = 2, c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda, e}$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$) charakterisiren das

*zweigängige 4-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. III. Fig. 29). Es besteht aus lauter parallelen kongruenten zweigängigen Schrauben (jede aus 2 ineinandergewundenen 4-punktschrauben gebildet), die sich durch Schiebung e , senkrecht zur Axe, zur Deckung bringen lassen. Die Hauptebenen folgen in gleichen Abständen $\frac{\lambda}{2}$ aufeinander; die abwechselnden tragen Punktpaare, gelegen wie die Endpunkte der Diagonalen von *einer* Richtung in den Quadraten der Projektionsfigur; die zwischenliegenden Hauptebenen tragen Punktpaare, deren Projektionen in die Endpunkte der anderen Diagonalen derselben Quadrate fallen. — Die Hauptaxen A und B sind zugleich zweizählige Drehaxen, ebenso die Axe C ($C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$).

2b) $p = 2, c = \frac{\lambda}{2}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \sigma}$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, 0}$) charakterisiren ein System, das mit dem nachher zu besprechenden 4b) wesentlich übereinstimmt (cf. daselbst).

3a) $p = 3, c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}, \lambda, e}$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}}$) charakterisiren das

linke 4-punktschraubensystem, das, bis auf den Windungssinn der Schrauben, mit dem rechten Schraubensystem genau übereinstimmt.

3b) $p = 3, c = \frac{\lambda}{2}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}, \lambda, \sigma}$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$) charakterisiren wieder ein *Gegenschraubensystem*, das von dem unter 1b) gefundenen nicht wesentlich verschieden ist; denn sobald man die Namen A und B der Hauptaxen vertauscht, sind die Deckbewegungen dieselben.

1) früher: Kreuzsprossensystem.

Der einzige Unterschied ist der, dass die an einem Systempunkt zunächst vorbeigehende Hauptaxe dort rechten Windungssinn, hier linken hat.

4a) $p = 4, c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, 0}$) charakterisiren das

Quadratsäulensystem (Taf. III. Fig. 30). Es besteht aus Punkten, welche die Kanten von lauter parallelen kongruenten quadratischen Prismen in gleichen Abständen und immer bei allen in gleicher Höhe über einer und derselben Hauptebene besetzen. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt, alle tragen zu kongruenten Quadraten angeordnete Punkte. Die Figur stellt unmittelbar eine solche Hauptebene vor. — Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

4b) $p = 4, c = \frac{\lambda}{2}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma$ (und $B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$) charakterisiren das

Quadratoktäedersystem (Taf. III. Fig. 31). Es lässt sich ansehen als aus 2 parallel mitten ineinanderstehenden kongruenten Quadratsäulensystemen bestehend, deren eines gegen das andere um die halbe Säulenhöhe $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ gehoben ist. Zwei Nachbarhauptebenen geben zusammen dieselbe Projektionsfigur wie das ganze System, indem die abwechselnden Quadrate der Fig. 31, Taf. III der einen, resp. der anderen Hauptebene angehören. Die Mitten von 4 nächstbenachbarten Quadraten der einen Hauptebene, und die Mitten derjenigen beiden, in den 2 Nachbarhauptebenen gelegenen, Quadrate, welche sich mitten zwischen die vorigen hinein in ein und dasselbe Quadrat projiciren, bestimmen zusammen ein Quadratoktäeder. — Die Deckbewegung um C ist $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$. — Das

vorher übergangene System 2b) unterscheidet sich vom vorliegenden nur dadurch, dass die Deckbewegungen um die beiderlei Arten von Hauptaxen A und B vertauscht sind. Dort ist es also nicht die einem Systempunkt nächste Hauptaxe, um welche die Vierpunktschraube angeordnet ist, sondern die fernere.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser
Abtheilung.

1) und 2) Rechtes und linkes 4-punktschraubensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}} \right).$$

3) Vierzähliges Gegenschraubensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \mp \frac{\lambda}{4}} \right).$$

4) Zweigängiges 4-punktschraubensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}} \right).$$

5) Quadratsäulensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, 0} \right).$

6) Quadratoktaedersystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}} \right).$

§ 13. Konstruktion der Systeme mit dreizähliger Hauptaxe
von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{3}, l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung auf

eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus den Ecken kongruenter paralleler gleichseitiger Dreiecke, deren Mit-
ten in der einen Art von Hauptaxen (A) liegen und da-
her nach Satz 34 (Fig. 18) ein Netz von gleichseitig drei-
eckigen Maschen bilden. Alle Dreiecke können in der Haupt-
ebene beliebig um ihre Mitten gedreht werden, wofern sie
nur untereinander parallel

bleiben. (Fig. 25.) Für die
der Axe parallele kleinste
Deckschiebung λ gilt nach
Satz 47 die Gleichung

$$p \cdot \lambda = 3l,$$

worin p nacheinander die
Werthe 1, 2, 3 annehmen
kann.

$$1) \text{ Bei } p = 1 \text{ wird } l = \frac{\lambda}{3}.$$

Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$

und λ charakterisiren eine 3-punktschraube (Taf. II. Fig. 15).

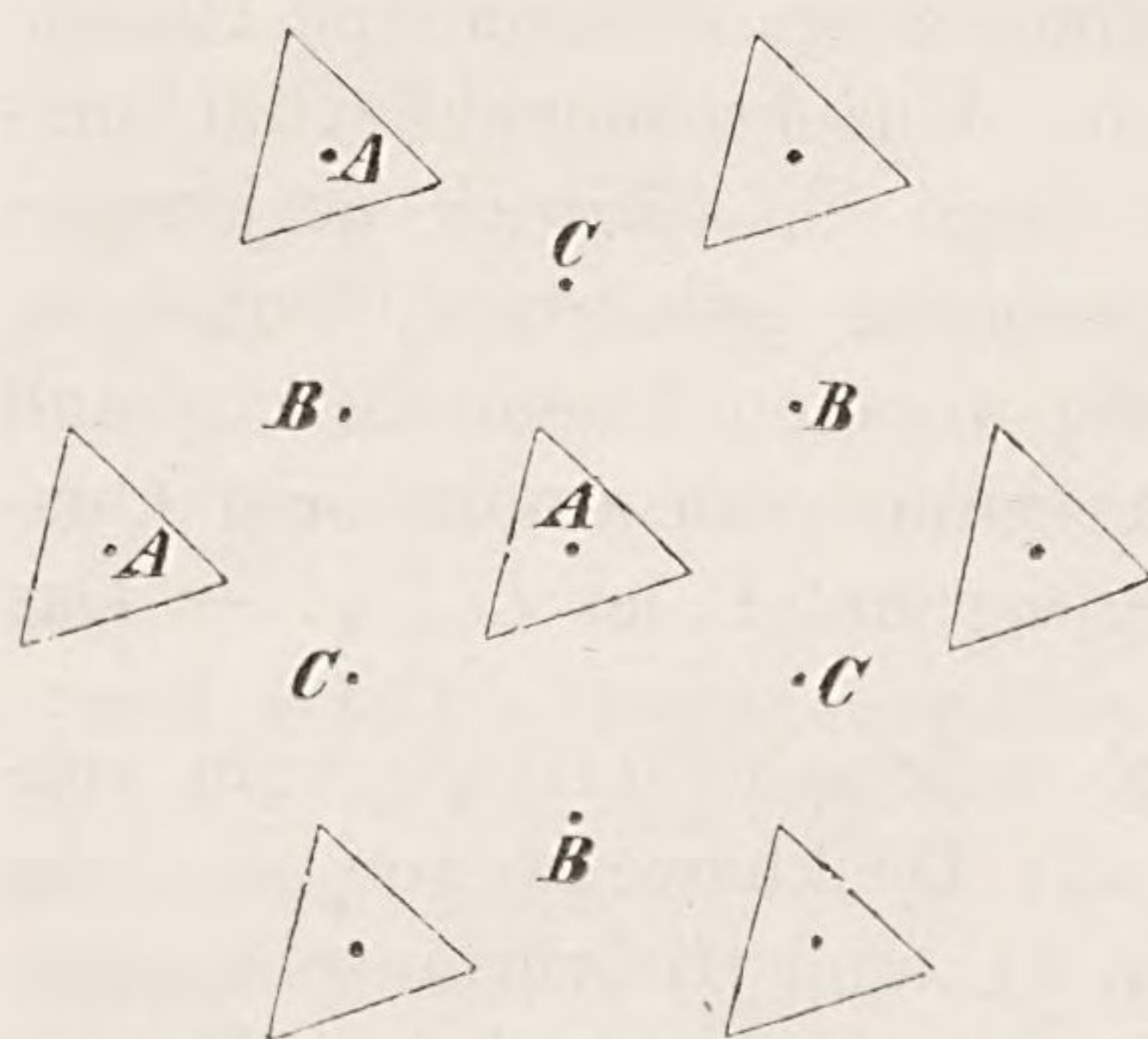


Fig. 25.

2) Bei $p = 2$ wird $l = \frac{2\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\lambda}{3}}$ und λ charakterisiren eine entgegengesetzt gewundene, also linke 3-punktschraube, denn die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit der Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{2\lambda}{3}}$ zu der Deckschraubung $A_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ zusammen.

3) Bei $p = 3$ wird $l = \lambda$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \lambda}$ und λ charakterisiren 3 ineinandergewundene 3-punktschrauben, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Ecken einer gleichseitig dreiseitigen Säule, denn die Deckschiebung $-\lambda$ setzt sich mit $A_{\frac{2\pi}{3}, \lambda}$ zur Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ zusammen, welche eine Drehung ist.

In jedem dieser Fälle sind die 3-punktschrauben des einen Cylindermantels den entsprechenden eines jeden anderen parallel (Zusatz 1 zu 47); indessen ist die Stellung der Schrauben der verschiedenen Cylindermäntel gegeneinander dadurch noch nicht genügend bestimmt; sie wird jetzt ermittelt. Die Anwendung von Hülffssatz II nebst Zusatz auf 2 gleiche nächste Hauptaxen A lehrt in Verbindung mit Hülffssatz IX, dass eine zur Axe senkrechte Schiebung $3a$ (welche die Basis eines durch 3 Axen B bestimmten gleichschenkligen Dreiecks mit den Seiten $e, e, 3a$ ist), eine Deckbewegung ist (Fig. 18). Durch wiederholte Ausführung dieser Deckschiebung in allen für sie möglichen Richtungen folgt, dass die Cylindermäntel des dritten Theils aller gleichen Hauptaxen A mit Punkten besetzt sind, die sich in einerlei Lage gegen ein und dieselbe Hauptebene befinden. Folglich ist auch die senkrecht zur Axe auszuführende Schiebung $3e$, welche gleich der langen Diagonale der durch den dritten Theil der Axen A bestimmten rhombischen Masche ist, eine Deckbewegung.

Es erübrigt noch, die Stellung der Schrauben auf den Cylindermänteln des zweiten und dritten Drittheils gleicher Axen A gegen diejenigen auf dem ersten Drittheil zu ermitteln. Das gelingt so (Fig. 26). Nach Satz 42 existirt eine Deckschiebung s , deren Projektion auf eine Hauptebene mit dem Abstände e zweier nächsten gleichen Hauptaxen zusammenfällt. Ihre Projektion auf die Axenrichtung heisse c .

Nun ist mit der Deckschiebung $3s$ äquivalent die Reihenfolge der beiden Schiebungen $3e$ und $3c$. (Hülfsatz I.) Weil aber,

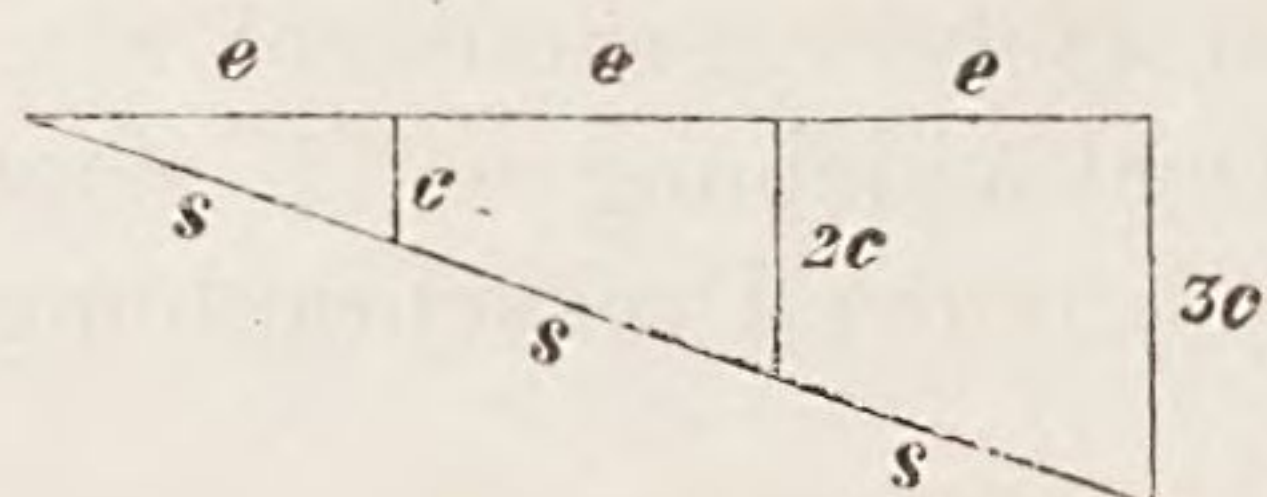


Fig. 26.

wie eben gezeigt, $3e$ auch eine Deckbewegung ist, so ist (nach Hülfsatz IX) auch $3c$ eine solche. Andererseits kennt man λ als kleinste, der Axe parallele, Deckschiebung. Also muss

$$3c = q \cdot \lambda, \text{ d. h. } c = \frac{q}{3} \cdot \lambda$$

sein, wo q eine ganze Zahl oder 0.

a) Ist nun q durch 3 theilbar, so wird c ein ganzes Vielfaches von λ , oder 0, und folglich ist dann c selbst eine Deckschiebung. Weil jetzt von den beiden Komponenten c und e der gegebenen Deckschiebung s die eine als Deckschiebung erkannt ist, so muss es auch die andere sein (nach Hülfsatz IX). In diesem Falle ist also der Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen eine Deckschiebung. Die der Axe parallele Komponente derselben ist $= 0$; also lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = 0$ darstellen.

b) Ist aber q nicht durch 3 theilbar, so kann es den Rest 1 oder 2 lassen. α) Wenn $q = 3r + 1$ ($r =$ ganze Zahl) ist, so führe man die beiden Deckschiebungen s und $-r \cdot \lambda$ aus; sie sind zusammen äquivalent einer gewissen Deckschiebung σ' , deren zur Axe parallele Komponente $= \frac{3r+1}{3} \lambda - r\lambda$, d. h. $= \frac{\lambda}{3}$ ist, während die in die Hauptebene fallende Komponente $= e$ ist. Keine dieser beiden Komponenten ist für sich eine Deckbewegung, sondern nur die ihnen äquivalente Bewegung σ' . Mit Rücksicht auf den Werth der zur Axe parallelen Komponente von σ' lässt sich dieser Fall durch die Bedingung $c = \frac{\lambda}{3}$ darstellen.

β) Wenn $q = 3r + 2$ ist, führe man die beiden Deckschiebungen s und $-(r+1)\lambda$ aus; beide sind äquivalent einer gewissen Deckschiebung σ'' , deren zur Axe parallele Komponente $= -\frac{\lambda}{3}$ ist, während die zur Hauptebene parallele Komponente $= e$ ist. Dieser Fall ist also darstellbar durch die Bedingung $c = -\frac{\lambda}{3}$.

In jedem der vorher ermittelten 3 Fälle (wo 1 bis 3 Schrauben ineinander gewunden sind), kann nun entweder die Deckschiebung e (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = 0$), oder eine Deckschiebung σ' oder σ'' (mit der zur Axe parallelen Komponente $c = \pm \frac{\lambda}{3}$, und der in die Hauptebene fallenden Komponente e) vorhanden sein. Die somit sich ergebenden 9 verschiedenen Fälle reduciren sich auf nur 4 wesentlich verschiedene. Für diese Reduktion ist es nützlich, auch die um die anderen Hauptaxen B und C vorhandenen Deckschraubungen zu ermitteln. Hierzu beachte man, dass der Abstand e zweier nächsten gleichen Axen A' und A'' die Basis für 2 kongruente gleichschenklige Dreiecke in

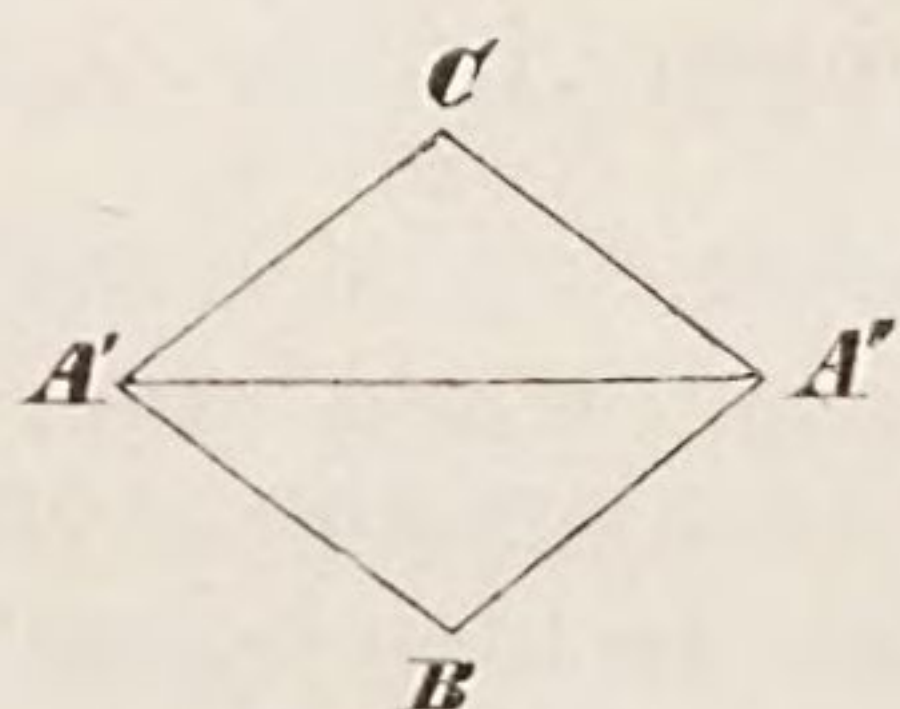


Fig. 27.

der Hauptebene bildet (Fig. 27), deren eins seine Spitze in einer Hauptaxe B , das andre seine Spitze in einer Hauptaxe C hat; und zwar sei hier diejenige Axe als B bezeichnet, die so liegt, dass die Umlaufung des betreffenden gleichschenkligen Dreiecks im Uhrzeigersinn (für den in der Axe stehenden Beobachter)

von A' über A'' nach B führt. Die Deckschiebung σ , deren zur Axe parallele Komponente $= c$ ist, verlaufe von A' nach A'' hin abwärts. Dann sind, nach Hülfsatz II nebst Zusatz, die beiden Deckbewegungen σ und $A'_{\frac{2\pi}{3}, l}$ äquivalent

einer Deckschraubung $B_{\frac{2\pi}{3}, l+c}$; und die beiden Deckbewegungen

σ und $A''_{\frac{2\pi}{3}, l}$ sind äquivalent einer Deckschraubung $C_{\frac{2\pi}{3}, l-c}$.

Würde dagegen die Deckschiebung σ von A' nach A'' hin aufwärts verlaufen, so wäre c durch $-c$ zu ersetzen. Man erkennt somit, dass unter allen Umständen die Schiebungscomponenten der 3 Schraubungen um die 3 verschiedenartigen 3-zähligen Axen A, B, C die Werthe haben $l - c, l, l + c$, wo c einen der Werthe $0, \pm \frac{\lambda}{3}$ besitzt.

Hiernach hat man folgende Fälle:

1a) $p = 1, c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e$,
(und $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$) charakterisiren das

*rechte 3-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. II. Fig. 15); es besteht aus lauter parallelen kongruenten 3-punktschrauben, die sich durch senkrecht zur Axe auszuführende Schiebungen e zur Deckung bringen lassen, und deren Axen auf der Hauptebene ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bestimmen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten Punktgittern von gleichseitig dreieckiger Masche besetzt.

1 b) $p = 1, c = \pm \frac{\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}, \lambda, \sigma}$ (und $B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}, C_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ für den Fall σ' , dagegen $B_{\frac{2\pi}{3}, 0, C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ für den Fall σ'') charakterisiren ein System, das von dem unter 3 b) zu besprechenden nicht wesentlich verschieden ist.

2 a) $p = 2, c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}, \lambda, e}$ (und $B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}, C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$) charakterisiren das *linke 3-punktschraubensystem*, welches, abgesehen vom Windungssinn der Schrauben, völlig mit dem rechten Schraubensystem übereinstimmt.

2 b) $p = 2, c = \pm \frac{\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}, \lambda, \sigma}$ (und $B_{\frac{2\pi}{3}, 0, C_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$ für den Fall σ' , dagegen $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}, C_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ für den Fall σ'') charakterisiren ein System, das im Wesentlichen mit dem unter 3 b) übereinstimmt.

3 a) $p = 3, c = 0$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0, \lambda, e}$ (und $B_{\frac{2\pi}{3}, 0, C_{\frac{2\pi}{3}, 0}$) charakterisiren das

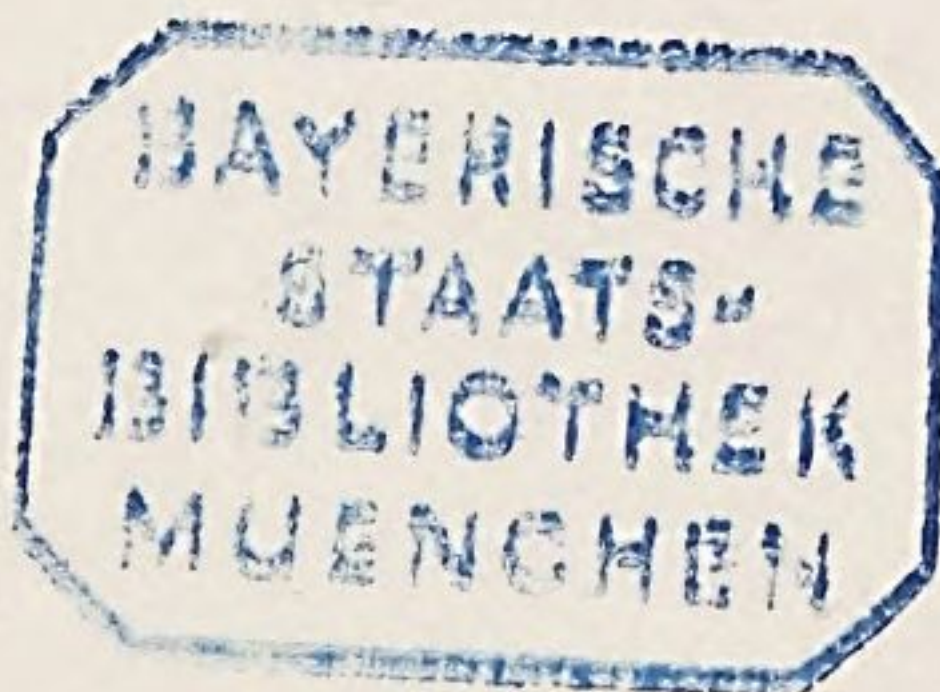
dreiseitige Säulensystem (Taf. II. Fig. 17). Es besteht aus Punkten, welche die Kanten von lauter parallelen kongruenten Prismen über gleichseitig dreieckiger Basis in gleichen Abständen und allemal in gleicher Höhe über ein und derselben Hauptebene besetzen. Die Hauptebenen sind kongruent besetzt; alle tragen zu kongruenten gleichseitigen Dreiecken angeordnete Punkte. Die Figur stellt unmittelbar eine solche Hauptebene vor.

1) früher: rechtes dreizähliges Schraubensystem.

3b) $p = 3$, $c = \pm \frac{\lambda}{3}$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, λ , σ (und $B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$, $C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$ für den Fall σ' , dagegen $B_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}}$, $C_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}$ für den Fall σ'') charakterisiren

das *Rhomboëdersystem* (Taf. II. Fig. 18). Durch die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ und λ werden Punkte bestimmt, die auf dreiseitigen Säulen ebenso wie beim vorigen System angeordnet sind. Solche umgeben also sämtliche Axen A ; doch ist ihre gegenseitige Stellung nur allemal um den dritten Theil aller Axen A derartig, dass sie durch eine zur Axe senkrechte Schiebung ineinander übergehn. Die Deckschiebung σ , deren zur Axe parallele Komponente $c = +\frac{\lambda}{3}$ oder $= -\frac{\lambda}{3}$ ist, versetzt die bisjetzt behandelten, zu dreiseitigen Säulen zusammenfassbaren, Punkte sammt den Säulenaxen in das zweite Drittheil von Axen A . Nochmalige Anwendung derselben Schiebung versetzt die eben gefundenen Säulen nebst ihren Axen in die noch übrigen Axen A . Fasst man nur die Mitten der gleichseitigen Dreiecke in's Auge, in deren Ecken die Systempunkte liegen, so bildet ein solcher Mittelpunkt auf A , verbunden 1) mit den um $\frac{\lambda}{3}$ tiefer liegenden 3 Mittelpunkten auf 3 gleichen Nachbaraxen A , sowie 2) mit den um $\frac{2\lambda}{3}$ tiefer liegenden 3 Mittelpunkten auf den anderen 3 gleichen Nachbaraxen A , und endlich 3) mit dem um λ tiefer liegenden Mittelpunkt auf der ursprünglichen Axe, zusammen ein *Rhomboëder*. (Taf. II. Fig. 18.) Das ganze System besteht also aus Punkten, gelegen in den Ecken von lauter kongruenten parallelen gleichseitigen Dreiecken, deren Centra ein rhomboëdrisches Raumgitter bilden. In der Figur, welche die Projektion von 3 aufeinanderfolgenden Hauptebenen, und zugleich die Projektion des ganzen Systems auf eine von ihnen, darstellt, gehören die durch verschieden schattirte Kreise dargestellten Systempunkte resp. den 3 aufeinanderfolgenden Hauptebenen an.

Die vorher übergangenen Systeme 1b) und 2b) unterscheiden sich vom vorliegenden nur dadurch, dass es nicht die einem Systempunkt nächste Axe A ist, um welche die



gleichseitigen Dreiecke angeordnet sind, sondern resp. die Axe C oder B .

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) und 2) Rechtes und linkes 3-punktschraubensystem.
 $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\lambda}{3}} \right).$

3) Dreiseitiges Säulensystem. $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \lambda, e, \left(B_{\frac{2\pi}{3}, 0}, C_{\frac{2\pi}{3}, 0} \right).$

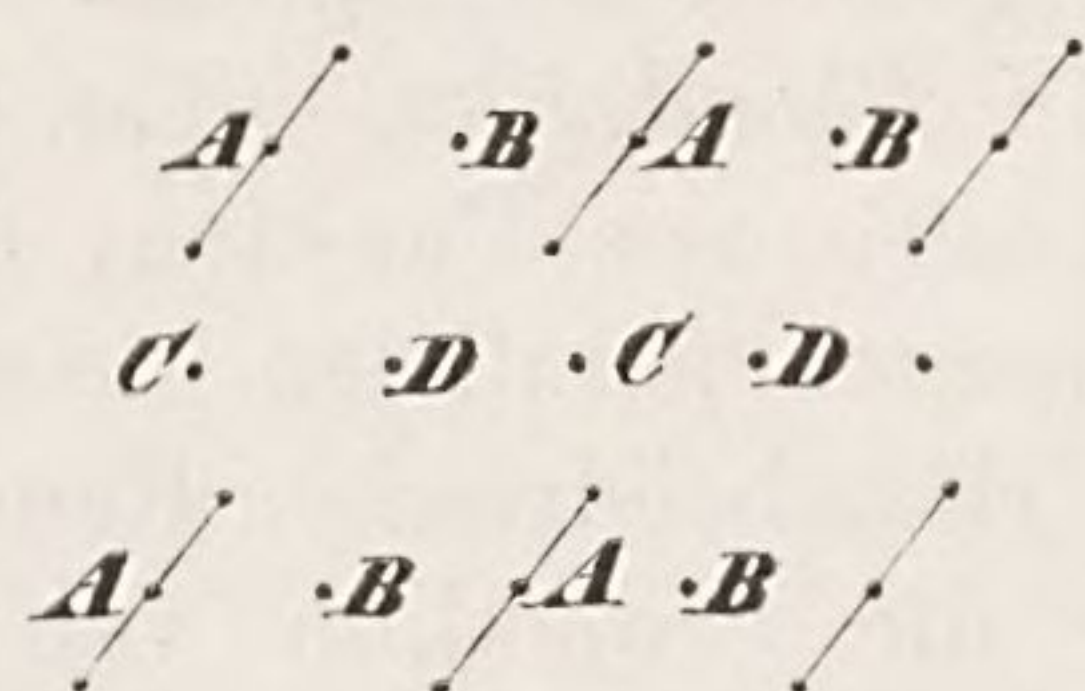
4) Rhomboëdersystem. $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \lambda, \sigma, \left(B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}} \right).$

Hier ist σ eine Deckschiebung, deren zur Axe parallele und senkrechte Comp. resp. $= \frac{\lambda}{3}$ und $= e$ ist.

§ 14. Konstruktion der Systeme mit zweizähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung.

Die charakteristische Deckbewegung um die Hauptaxe ist $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$. Die Projektion aller Systeme dieser Abtheilung

auf eine Hauptebene besteht nach Satz 46 aus kongruenten parallelen Punktpaaren, deren Mittelpunkte in der einen Art von Hauptaxen A liegen, und daher nach Satz 38 (Fig. 19) ein Netz parallelogrammatischer Maschen bilden (Fig. 28). Alle Punktpaare können in der Hauptebene um ihre Mitten beliebig gedreht werden, wofern sie nur untereinander parallel bleiben. Dabei kann der bemerkenswerthe Specialfall eintreten, dass die Punktpaare in die Maschenseiten hineinfallen.



Für die der Axe parallele Deckschiebung λ gilt nach Satz 47 die Gleichung:

$$p \cdot \lambda = 2 \cdot l,$$

worin p nacheinander die Werthe 1, 2 annehmen kann.

1) Bei $p = 1$ wird $l = \frac{\lambda}{2}$. Die

Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$ und λ cha-

rakterisiren eine 2-punktschraube;¹⁾

sie besteht aus Punkten, die eine jede von 2 parallelen

¹⁾ früher als „Wechselstreifen“ bezeichnet.



Fig. 28.

Geraden äquidistant in der Weise besetzen, dass die Orthogonalprojektionen der Punkte der einen Geraden auf die andere mitten zwischen die dortigen Punkte fallen.

2) Bei $p = 2$ wird $l = \lambda$. Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2}, \lambda}$ und λ charakterisiren 2 ineinandergewundene 2-punktschrauben, welche jedoch eine einfachere Auffassung zulassen. Fasst man nämlich $A_{\frac{2\pi}{2}, \lambda}$ und $-\lambda$ zu einer einzigen Deckbewegung zusammen, so erhält man die zweizählige Drehung $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Diese Bewegung und die Schiebung λ bestimmen nun zusammen lauter Punkte, die auf 2 parallelen Geraden in gleichen Abständen und paarweise in gleicher Höhe über einer und derselben Hauptebene liegen. Dieser punktbesetzte Parallelstreifen lässt sich analog den Säulen früherer Systeme als „zweizählige Säule“ bezeichnen.

Die 2-punktschrauben aller Cylindermäntel sind (nach Zusatz zu 47) einander parallel; um ihre gegenseitige Stellung nun vollständig zu bestimmen, verfährt man so: Die Anwendung von Hülfsatz II nebst Zusatz auf 2 gleiche nächste Hauptaxen A lehrt, in Verbindung mit Hülfsatz IX, dass eine zur Axe senkrechte Schiebung $4a' = 2e'$, welche in die Axentragende Linie L fällt, eine Deckbewegung ist. Ebenso erkennt man auch die Schiebung $4a'' = 2e''$ als eine Deckbewegung (Fig. 19). Also sind die Cylindermäntel des vierten Theils aller gleichen Axen A mit Punkten besetzt, die sich in einerlei Lage gegen eine und dieselbe Hauptebene befinden. — Um nun die gegenseitige Stellung der 2-punktschrauben auf den Cylindermänteln dieser 4 Gruppen von gleichen Axen zu ermitteln, beachte man, dass nach Satz 42 Zusatz 1 Deckschiebungen $s' s'' s'''$ existiren, deren Projektionen auf die Hauptebene mit den verdoppelten Seiten des Elementardreiecks, nämlich mit $e' e'' e'''$, zusammenfallen. Ihre Projektionen auf die Axenrichtung heissen c', c'', c''' . Nun ist mit der Deckschiebung $2s'$ äquivalent die Reihenfolge der beiden Schiebungen $2e'$ und $2c'$ (Hülfsatz I); und weil, wie eben gezeigt, $2e'$ auch eine Deckbewegung ist, so ist auch $2c'$ eine solche. (Hülfsatz IX.) Andererseits kennt man λ als kleinste, der Axe parallele, Deckschiebung. Also muss:

$$2c' = q \cdot \lambda, \text{ oder } c' = \frac{q}{2} \lambda$$

sein, wo q eine ganze Zahl oder 0 ist. Nun folgt wie in § 12 Seite 88, dass c' entweder $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein muss. Im ersteren Falle ist also der Abstand c' zweier nächsten gleichen Hauptaxen selbst eine Deckschiebung; im anderen Falle existirt eine Deckschiebung σ' , deren Projektion auf die Hauptebene in e' fällt, während die Projektion auf die Axenrichtung $= \frac{\lambda}{2}$ ist.

In gleicher Weise ergibt sich, dass c'' und auch c''' nur $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein kann. Weil indessen eine der 3 Deckschiebungen $s' s'' s'''$ aus den beiden anderen folgt, so sind auch nur 2 von den 3 Grössen $c' c'' c'''$ unabhängig voneinander; es seien c' und c'' . — Aus der Verbindung der 3 Grössen l, c', c'' , deren jede entweder $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein kann, gehn nun 8 mögliche Fälle hervor, welche sich jedoch auf nur 3 wesentlich verschiedene reduciren. Zu dieser Reduktion führt die Aufsuchung der Deckbewegungen um die 3 anderen Arten zweizähliger Axen B, C, D . Aus Hülfsatz II nebst Zusatz geht hervor, dass die beiden Deckbewegungen s' und $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$ zusammen äquivalent sind der einen Deckschraubung $B_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c'}$, sowie dass s'' und $A_{\frac{2\pi}{2}, l}$ zusammen äquivalent sind der einen Deckschraubung $C_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c''}$. Ebenso sind schliesslich s' und $C_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c''}$ äquivalent mit $D_{\frac{2\pi}{2}, l \pm c' \pm c''}$.

Die Schraubungen um die Axen A, B, C, D besitzen also bezüglich folgende Schiebungskomponenten: $l, l \pm c', l \pm c'', l \pm c' \pm c''$. Weil aber jede der 3 Grössen l, c', c'' nur entweder $= 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$ sein kann, so entstehen für jene Schiebungskomponenten auch nur die beiden wesentlich verschiedenen Werthe 0 und $\frac{\lambda}{2}$; denn wenn eine derselben z. B. $= \lambda$ oder $= \frac{3}{2} \lambda$ wird, so bringt die Hinzufügung der Deckschiebung $-\lambda$ zu jener Schraubung wieder eine Schraubung mit der Schiebungskomponente 0 oder $\frac{\lambda}{2}$ hervor. Nun sind

bezüglich der Grössen c' und c'' nur 3 verschiedene Fälle möglich:

Entweder ist $c' = c'' = 0$. Dann sind alle 4 Axenarten A, B, C, D Drehungsaxen, oder alle sind Schraubenaxen mit der Schiebungs-komponente $\frac{\lambda}{2}$.

Oder es ist $c' = \pm c'' = \frac{\lambda}{2}$. Dann sind die Axen A und D Drehungsaxen, und B und C Schraubenaxen mit der Schiebungs-komponente $\frac{\lambda}{2}$, oder umgekehrt A und D Schraubenaxen, und B und C Drehungsaxen, je nachdem $l = 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$.

Oder eine der beiden Grössen c', c'' ist $= 0$, die andre $= \frac{\lambda}{2}$. Für den Fall $c' = 0, c'' = \frac{\lambda}{2}$ sind A und B Drehungsaxen, C und D Schraubenaxen mit Schiebungs-komponente $\frac{\lambda}{2}$, oder umgekehrt, je nachdem $l = 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$. Für den Fall $c' = \frac{\lambda}{2}, c'' = 0$ sind A und C Drehungs-, B und D Schraubenaxen, oder umgekehrt, je nachdem $l = 0$ oder $= \frac{\lambda}{2}$.

Die hier auftretenden verschiedenen Fälle reduciren sich auf folgende drei:

- 1) Alle 4 Axenarten sind Drehungsaxen.
- 2) Alle 4 Axenarten sind Schraubenaxen mit Schiebungs-komponente $\frac{\lambda}{2}$.

3) Zwei Axenarten sind Drehungsaxen, die anderen 2 sind Schraubenaxen mit Schiebungs-komponente $\frac{\lambda}{2}$. Welche der 4 Axenarten einander hier paarweise zugeordnet sind, ist im Allgemeinen gleichgültig. Nur in gewissen Special-fällen (wovon nachher Näheres) entspringen wesentlich verschiedene Systeme, je nachdem man dies oder jenes Paar von Axen einander zuordnet.

Zur Charakteristik der 3 Systeme, auf die man somit geführt wird, genügt es, neben der zur Axe parallelen Deck-

schiebung die Deckbewegungen um 3 Axenarten anzugeben, weil die Deckbewegung um die vierte, sowie die verschiedenen Deckschiebungen, daraus folgen.

1) Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},0}$, $C_{\frac{2\pi}{2},0}$, λ , (und $D_{\frac{2\pi}{2},0}$, e' , e'' , e''') charakterisiren das

*zweizählige Säulensystem*¹⁾ (Taf. I. Fig. 2); es besteht aus Punkten, welche die Grenzlinien von lauter parallelen, kongruenten Parallelstreifen (anders ausgedrückt: die Kanten von zweizähligen Säulen, Seite 99) in gleichen Abständen und allemal in gleicher Höhe über einer und derselben Hauptebene besetzen. Die Mittellinien dieser Streifen werden von der einen Axenart, z. B. A , gebildet. Alle Hauptebenen sind kongruent besetzt, und zwar mit Punktpaaren. Die Figur stellt unmittelbar eine solche Hauptebene vor.

2) Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, $B_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, λ , (und $D_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, e' , e'' , e''') charakterisiren das

*2-punktschraubensystem*²⁾ (Taf. I. Fig. 3); es besteht aus lauter parallelen kongruenten 2-punktschrauben, die sich durch senkrecht zur Axe ausgeführte Schiebungen e' und e'' zur Deckung bringen lassen, und deren Axen in der Hauptebene ein parallelogrammatisches Netz bestimmen. Alle Hauptebenen sind mit kongruenten parallelogrammatischen Punktgittern besetzt.

3) Die Deckbewegungen $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},0}$, $C_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, λ , (und $D_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, e' , σ'' , σ''') charakterisiren das

*System der klinorhombischen Säule (oder das zweizählige Oktaëdersystem)*³⁾ (Taf. I. Fig. 4); es lässt sich ansehen als aus 2 parallel ineinander gestellten kongruenten Säulensystemen bestehend, deren eines gegen das andere um die halbe Säulenhöhe $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ gehoben ist. Zwei Nachbarhauptebenen geben zusammen dieselbe Projektionsfigur wie das ganze System, in-

1) Früher: Streifensystem.

2) Früher: monoklines Wechselstreifensystem.

3) Früher: zusammengesetztes Streifensystem.

dem die abwechselnden Reihen von Punktpaaren der einen, resp. anderen Hauptebene angehören. Die Mitten sämtlicher Punktpaare bilden ein klinorhombisches Raumgitter, und zwar verläuft die Axe der klinorhombischen Säule in der Figur von links nach rechts. — Es ist nothwendig, einige *Specialfälle* von diesem System zu schildern. Nämlich wenn das Elementarparallelogramm (vergl. Seite 75) rechteckig oder rhombisch ist, so ist ein Paar diagonal gegenüberstehender Axen durch diese seine Stellung wesentlich verschieden von einem Axenpaar, das durch 2 Nachbarecken des Elementarparallelogramms hindurchgeht. Dadurch entstehen 3 bemerkenswerthe Specialfälle.

α) Wenn bei *rechteckigem* Elementarparallelogramm beide Drehungsaxen durch 2 Nachbarecken gehn, so bilden die Mittelpunkte der Punktpaare das Raumgitter *der geraden Rhombensäule*. (Fig. 29.)

β) Wenn bei *rechteckigem* Elementarparallelogramm beide

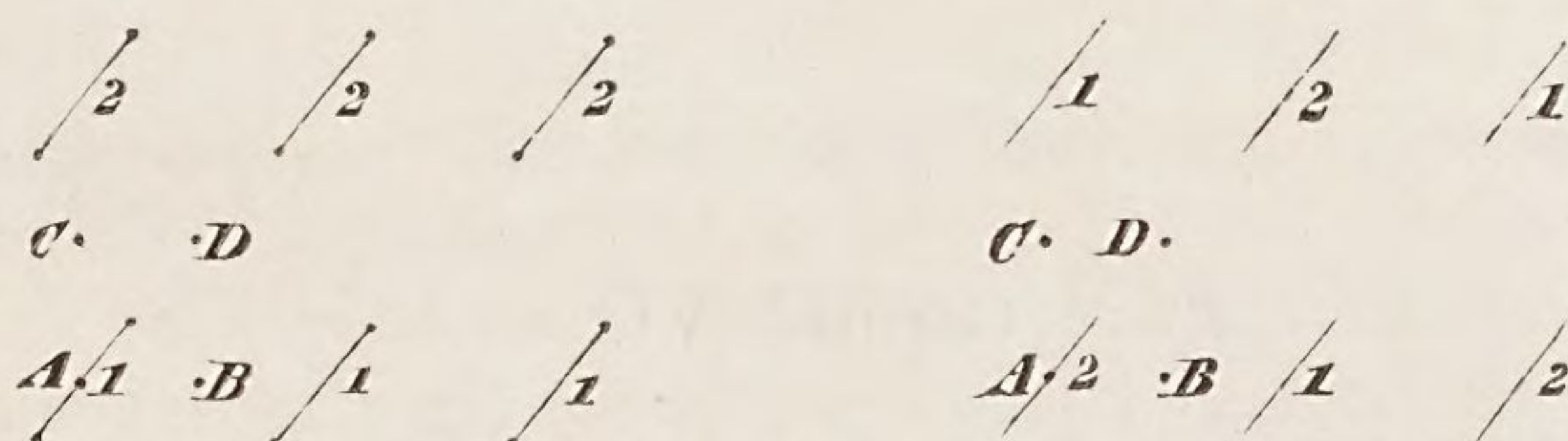


Fig. 29.

Fig. 30.

Drehungsaxen diagonal gegenüberstehn, so bilden die Mittelpunkte der Punktpaare ein *rhombenoktaëdrisches* Raumgitter (Fig. 30), d. h. ein Gitter mit centrirtten rhombischen Säulen.

γ) Wenn bei *rhombischem* Elementarparallelogramm beide Drehungsaxen diagonal gegenüberstehn, so sind die Mittelpunkte der Punktpaare nach *Oblongoktaëdern* angeordnet, d. h. 4 benachbarte bilden ein Rechteck, und senkrecht über und unter seiner Mitte liegt je 1 Nachbarmittelpunkt (Fig. 31).

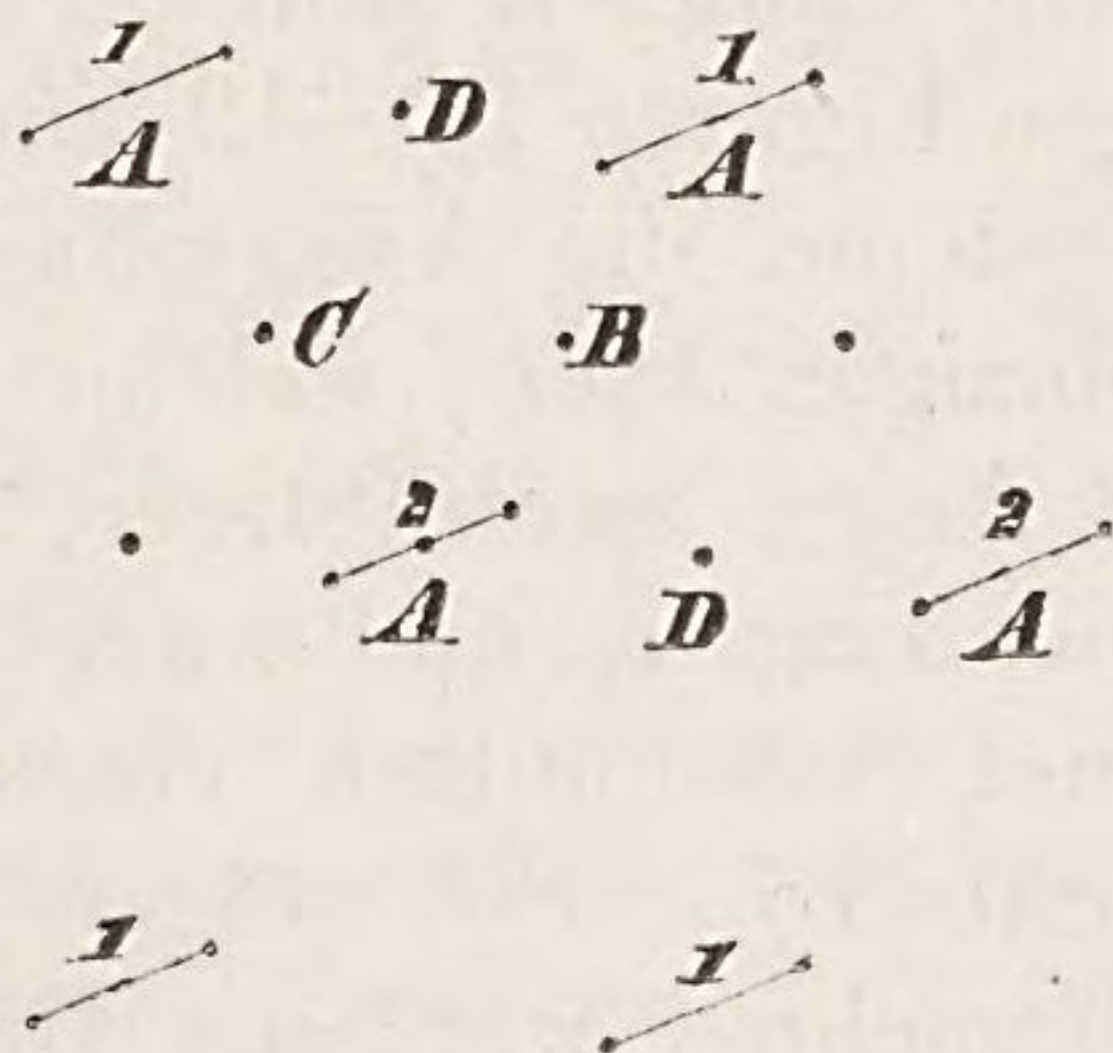


Fig. 31.

Wenn bei rhombischem Elementarparallelogramm beide Drehungsaxen durch 2 Nachbarecken gehn, zeigt das System keine bemerkenswerthen Eigenthümlichkeiten. — Diese Specialfälle werden im folgenden Capitel von besonderer Wichtigkeit.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

- 1) Zweizähliges Säulensystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', e'', \lambda.$
- 2) 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{\lambda}}, e', e'', \lambda.$
- 3) System der klinorhombischen Säule. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', \sigma'', \lambda.$

Zu letzterem 3 Specialfälle.

In den Symbolen sind e' und e'' die beiden kleinsten Deckschiebungen in 2 zur Axe senkrechten Richtungen; und σ'' ist eine Deckschiebung, deren zur Axe parallele und senkrechte Komponente resp. $= \frac{\lambda}{2}$ und $= e''$ ist.

Capitel VI.

Punktsysteme mit gleichen Hauptaxen von zwei entgegengesetzten Richtungen.

§ 15. Allgemeine Vorbetrachtungen zur Konstruktion solcher Systeme.

Die für n -zählige Hauptaxen (sei es von *einer* Richtung, sei es von 2 entgegengesetzten Richtungen) allein möglichen Anordnungen sind in § 9 abgeleitet. Also stellen die dortigen Figuren 16—19 auch für die jetzt zu ermittelnden Punktsysteme die Axenschnitte mit einer Hauptebene vor. Die einzigen Axen, welche zu den früheren neu hinzutreten, sind 2 Arten zweizähliger, welche senkrecht zu den Hauptaxenrichtungen, und zwar parallel den Radien nach den Ecken und Seitenmitten eines regulären ebenen n -ecks verlaufen (Satz 16). Sie mögen *Queraxen* heissen und mit Q und Q' bezeichnet werden. Die Deckbewegungen um die Queraxen dürfen keine neuen Lagen für die Hauptaxen hervorrufen,

(weil eben die einzig möglichen Hauptaxenlagen schon konstruirt sind), sondern sie müssen die Hauptaxen in Linien führen, welche vorher schon von Hauptaxen besetzt waren. Dabei sind aber 2 verschiedene Fälle möglich. Im vorigen Capitel, wo nur Axen von einer einzigen Richtung betrachtet wurden, hatten sich nämlich — ausser bei sechszähligen Axen — immer mehrere Arten von Hauptaxen als gleichzeitig neben einander vorhanden ergeben; jede dieser Hauptaxenarten hatte in der Hauptebene ein ebensolches Schnittpunktsnetz wie die andern, jedoch waren die verschiedenen Hauptaxenarten A , B , .. nicht deckbar, weder durch Schiebungen noch durch Drehungen um parallele Axen. Durch die jetzt hinzutretenden Deckbewegungen um die Queraxen kann es nun möglich werden, eine dieser Hauptaxenarten mit der anderen zur Deckung zu bringen, so dass beide nur scheinbar ungleich sind, nämlich nur solange, als man Deckbewegungen um Queraxen ausschliesst. — Die beiden zu unterscheidenden Hauptfälle sind nun folgende:

a) *Entweder* kommen, bei Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe, nur Hauptaxen derselben Benennung miteinander zur Deckung;

b) *Oder* es kommen auch Hauptaxen verschiedener Benennung mit einander zur Deckung.

In beiden Fällen wird *zur Konstruktion der Punktsysteme* folgendermassen verfahren. An ganz beliebiger Stelle nimmt man einen Punkt P als zum System gehörig an, und führt nun wiederholt und in allen möglichen Reihenfolgen die Deckbewegungen um die Hauptaxen, sowie die Deckschiebungen aus. Die sämtlichen Lagen, in welche P hierbei geführt wird, bilden dann zusammen eins der Systeme des vorigen Capitels. Führt man schliesslich noch die Deckbewegung um eine der zweizähligen Queraxen aus, so werden dadurch neue Orte mit Systempunkten besetzt, indem das vorige System in eine neue Lage gerückt und somit verdoppelt wird. *Dieses verdoppelte System ist das gesuchte neue Punktsystem.* Indem man nacheinander alle Systeme des vorigen Capitels als Ausgang wählt, und sie durch die Deckbewegung um eine Queraxe verdoppelt, erhält man sämtliche möglichen Systeme der vorliegenden Abtheilung. Zunächst soll nun eine allgemeine Vorstellung von der gegenseitigen Stellung

der beiden ineinandergesetzten kongruenten Theilsysteme gewonnen werden.

a) Wenn bei der Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe nur Hauptaxen derselben Benennung miteinander zur Deckung kommen, so muss es sich, in Folge der Gleichheit der Axen, stets bewirken lassen, dass eine der umgedrehten Axen sogar in dieselbe Gerade fällt, in der sie vor der Umkehrung lag, und dass doch Deckung des beweglichen und festen Systems herbeigeführt ist. Die umgekehrte Lage wird aber in diesem Fall aus der ursprünglichen herbeigeführt durch zweizählige *Drehung* um eine Queraxe Q , welche jene Hauptaxe senkrecht schneidet. Diese Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ ist also

eine Deckbewegung des Systems. Durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{n}, l}$ gehn aus dieser Queraxe andere hervor, welche

parallel den Radien nach den Ecken eines regulären ebenen n -ecks verlaufen. Und ausser diesen müssen nach Satz 16 andere zweizählige Queraxen Q' nach n anderen Richtungen verlaufen, indem sie die Winkel der vorigen halbiren. Aus einer ursprünglich gegebenen Queraxe Q folgen durch die charakteristischen Deckschiebungen jedes Systems, und mit Anwendung des Hülfsatzes II mit Zusätzen, sämtliche Queraxen von gleicher Richtung. Dasselbe gilt für eine gegebene Axe Q' , deren Lage selbst aber durch die vorigen schon bedingt ist. — Weil durch die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ alle Haupt-

axen in ihresgleichen fallen sollen, so sind für die Axen Q nur folgende Lagen innerhalb der Maschen, welche von der Gesamtheit aller Hauptaxen in einer Hauptebene gebildet werden, möglich.

Bei *sechszähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a) oder Höhen der dreieckigen Maschen (Fig. 16);

Bei *vierzähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a) oder Diagonalen der quadratischen Maschen (Fig. 17);

Bei *dreizähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a) der dreieckigen Maschen (Fig. 18);

Bei *zweizähliger* Hauptaxe: in den Seiten (a' , a'') der parallelogrammatischen Maschen (Fig. 19), welche hier rechteckig sein müssen.

Jetzt denke man das Punktsystem in der vorher beschriebenen Weise konstruirt, und man lege die zur Axenrichtung senkrechte Ebene, auf welche das System projicirt wird, durch die bei jener Konstruktion angewandte Queraxe (Konstruktionsaxe). Führt man nun die zweizählige Drehung um Q aus, so nimmt die Gesammtheit der Punkte, welche im einfachen System des vorigen Capitels sich in die Ecken eines der n -ecke projicirten, eine solche Lage an, dass sie sich in ein neues, dem vorigen kongruentes n -eck projiciren, welches aus dem vorigen durch Drehung um eine Axe Q hervorgeht (Fig. 32). Die Mittelpunkte aller dieser neuen n -ecke fallen in die Mittelpunkte von früher schon vorhandenen, weil sie ja durch die Schnittpunkte der einen Hauptaxenart mit der Hauptebene bestimmt sind. Die Ecken von je 2 mit den Mittelpunkten zusammenfallenden n -ecken bestimmen ein halbregelmässiges $2n$ -eck.

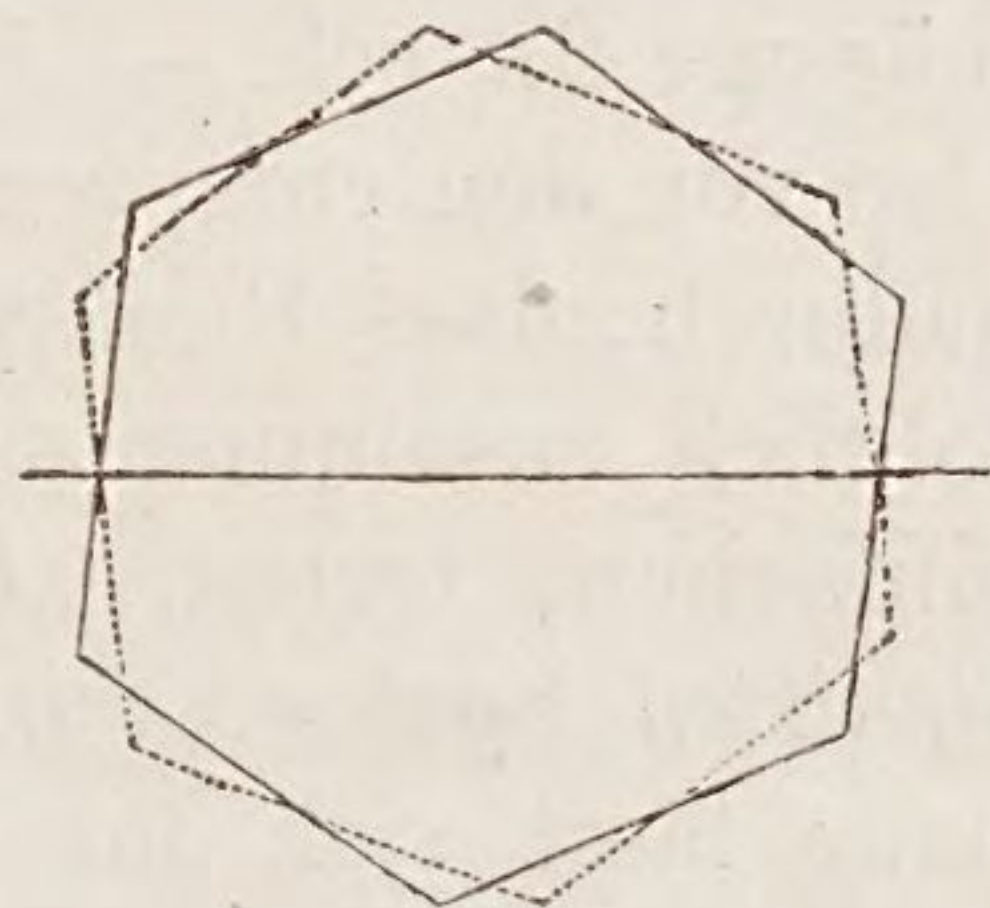


Fig. 32.

Erklärung. Ein Vieleck soll nämlich halbregelmässig heissen, wenn es lauter gleiche Winkel, aber nur abwechselnd gleiche Seiten besitzt. — Hiernach ergibt sich folgender

Satz 48. Die Projektionsfigur aller der Systeme dieses Capitels, bei denen durch Drehung um eine Queraxe Hauptaxen von einerlei Benennung miteinander zur Deckung kommen, besteht aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbregelmässigen $2n$ -ecken, deren Centra in den Hauptaxen von einerlei Benennung liegen (Textfig. 33, 34, 39, 42).

Weil die Systeme des vorigen Capitels sämmtlich aus Schaaren von 1 bis n ineinandergewundenen n -punktschrauben bestehn, so ist es zunächst nöthig, dasjenige Gebilde zu untersuchen, das durch zweizählige Drehung einer n -punktschraube um eine, ihre Axe treffende, Queraxe hervorgeht. Weil nun der Windungssinn einer Schraube durch Umkehrung der Axenrichtung ungeändert bleibt, so übersieht man ohne Weiteres, dass sich nach der Umkehrung 2 kongruente n -punktschrauben um ein und dieselbe Axe gewunden finden, deren eine gegen die andere um einen gewissen Winkel gedreht und parallel der Axenrichtung auch um eine gewisse Strecke verschoben ist. Fasst man nun 2 Punkte, deren

einer zur einen, deren anderer zur zweiten dieser beiden coaxialen Schrauben gehört, und welche so nahe als möglich beisammen stehn, in Gedanken als ein *Punktpaar* zusammen, so besteht das Gebilde aus lauter Punktpaaren, deren jedes durch Ausführung der Deckbewegung $A_{\frac{2\pi}{n}}$ in das nächst-

folgende übergeht. Dieses Gebilde heisse eine *zusammengesetzte n-punktschraube*; sie projecirt sich in das halbreghelmässige $2n$ -eck. — Alle Systeme dieser Art unterscheiden sich also von den entsprechenden Systemen des vorigen Capitels nur dadurch, dass Punktpaare an die Stelle der einfachen Punkte, folglich zusammengesetzte *n-punktschrauben* an die Stelle der einfachen, treten. *Hieraus erhellt zugleich, dass die so konstruirten Systeme wirklich regelmässig sind*; denn jedes Punktpaar lässt sich mit jedem anderen Punktpaar des Systems durch die Deckbewegungen des entsprechenden einfachen Systems (des vorigen Capitels) zur Deckung bringen; und die beiden Punkte eines Paares kommen durch zweizählige Drehung um eine Queraxe zur Deckung, während zugleich das ganze (bewegliche und feste) System zur Deckung gelangt. Andere als die hiermit konstruirten Punkte werden durch die vorhandenen Deckbewegungen nicht gefordert. — Schliesslich mag noch hervorgehoben werden, dass statt der Punktpaare auch einzelne Punkte vorhanden sein können, wodurch das verdoppelte System den Anschein eines einfachen bekommt. Dies ist immer dann der Fall, wenn eine Queraxe durch einen Punkt des einfachen Systems hindurchgeht.

b) *Wenn bei der Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe Hauptaxen verschiedener Benennung miteinander zur Deckung kommen*, so müssen sie doch dieselbe Schiebungs-komponente der Schraubung besitzen, sonst könnten sie nicht deckbar sein. Welche Lage eine Queraxe haben muss, um eine solche Deckung herbeizuführen, wird nachher bei den einzelnen Abtheilungen untersucht. Wie im Falle a) gehn auch hier aus einer gegebenen Axe Q alle ihr parallelen hervor, wenn man die charakteristischen Deckschiebungen des Systems und den Hülfsatz II nebst Zusätzen anwendet. Dagegen folgen die gleichen, aber anders gerichteten Q durch Anwendung der Deckbewegungen um die Hauptaxen. Ent-

sprechendes gilt von den Queraxen zweiter Art (Q'); nur ist die Lage einer solchen Axe durch die vorigen schon bedingt. —

Nach Ausführung der Deckbewegung um eine Queraxe finden sich kongruente n -punktschrauben um Hauptaxen von zwei verschiedenen Benennungen (A und B); jedoch die Schrauben der einen Gruppe um eine gewisse Strecke gegen die der anderen Gruppe verschoben, gerechnet von einer und derselben Hauptebene aus, und über n -ecken stehend, von denen je 2 symmetrisch zu einander sind. — Bezüglich der Projektion auf eine Hauptebene gilt, wie man hiernach ohne Weiteres sieht, der

Satz 49. *Die Projektionsfigur aller der Systeme dieses Capitels, bei denen durch zweizählige Bewegung um eine Queraxe Hauptaxen verschiedener Benennung miteinander zur Deckung kommen, besteht aus 2 Schaaren kongruenter regelmässiger n -ecke, so dass die eine Schaar symmetrisch zwischen die andere hineingesetzt ist (Textfig. 37, 47, 48).*

Dass die so konstruirten Doppelsysteme wirklich dem Begriffe regelmässiger Punktsysteme genügen, wird durch folgende Betrachtung anschaulich. Ein einfaches System des vorigen Capitels lässt ausser der bisher immer festgehaltenen Auffassung noch folgende andere zu. Statt alle Punkte zu Schrauben auf Cylindermänteln um die nächstliegenden Axen A zusammenzufassen, ordne man die n Punkte eines Schraubenganges (oder, wenn p Schrauben ineinander gewunden sind, die $p \cdot n$ Punkte) den n anders benannten Axen B zu, welche um jene Axen A zunächst herumstehn. Dadurch erscheint das System jetzt aus anderen Schrauben aufgebaut, welche sich um die anderen Axen B winden. — In dieser Weise fasse man jetzt bei einem der vorliegenden Doppelsysteme dasjenige Theilsystem, welches aus den zunächst um die Axen A gelegenen Punkten besteht, als System von Punkten auf weiteren Cylindermänteln um die Axen B auf, während das zweite Theilsystem, wie üblich, als aus den Punkten auf den engen Cylindermänteln um dieselben Axen bestehend gedacht wird. Führt man nun die Deckbewegung um eine Axe B aus, so ist ersichtlich, dass dabei jedes der beiden Theilsysteme für sich zur Deckung kommt. Dagegen sind es zweizählige Deckbewegungen um Queraxen, wodurch ein Punkt

des einen Theilsystems mit einem des anderen zur Deckung gebracht wird. Andere als die hiermit konstruirten Punkte werden durch die vorhandenen Deckbewegungen nicht gefordert.

Satz 50. *Wenn bei zweizähliger Bewegung um eine Queraxe die beiden Fälle zugleich eintreten, dass sowohl Hauptaxen derselben Benennung, als auch Hauptaxen verschiedener Benennung miteinander zur Deckung kommen (was bei dreizähliger und bei zweizähliger Hauptaxe eintreten kann), so lässt sich die Projektion auf eine Hauptebene auffassen entweder als aus kongruenten halbreghelmässigen $2n$ -ecken, oder als aus 2 Schaaren kongruenter, symmetrisch zwischen einander gestellter regelmässiger n -ecke gebildet (Textfig. 41, 45).*

Beweis folgt aus den Betrachtungen zur Ableitung der Sätze 48 und 49.

Hilfssatz. *Alle gleichgerichteten Schiebungen, welche zu den Deckbewegungen eines Punktsystems gehören, sind ganze Vielfache einer und derselben kleinsten Deckschiebung.*

Beweis. Gegeben seien 2 Deckschiebungen gleicher Richtung; dann ist auch ihre Differenz δ_1 eine Deckschiebung (Hilfssatz I und IX). Ebenso ist auch die Differenz δ_2 zwischen δ_1 und der kleineren von beiden gegebenen Schiebungen eine Deckschiebung; ebenso die Differenz von δ_2 und δ_1 , u. s. f. So gelangt man schliesslich *entweder* zur Differenz 0; in diesem Falle sind die beiden letzten gleichen δ die fragliche kleinste Deckschiebung. Oder man findet unaufhörlich immer kleinere Deckschiebungen. Das ist aber unmöglich, weil dann Systempunkte unendlich nahe aneinander lägen.

Satz 51. *Andere Punkte, als die zu den 2 ineinanderstehenden Theilsystemen gehören, sind in Systemen mit gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen nicht möglich.*

Beweis. Angenommen zum System gehörte noch ein anderer Punkt, so müsste ein früherer Punkt mit ihm zur Deckung gebracht werden können, so dass zugleich das bewegliche und feste System sich decken. Diese Deckbewegung könnte etwa eine Schiebung sein, doch müsste ihre Projektion auf die Hauptebene entweder in den Abstand e zweier nächsten Hauptaxen von gleicher Benennung fallen oder $= 0$ sein,

damit keine neuen, unerlaubten Hauptaxenlagen entstehen. Weil nun schon Deckschiebungen existiren, die sich in e projiciren, so lassen sie sich mit den eben angenommenen zusammensetzen, woraus folgt, dass nur solche neue Deckschiebungen betrachtet zu werden brauchen, die den Hauptaxen parallel sind. — Wäre die Deckbewegung dagegen eine Schraubung, so dürfte sie doch nur zweizählig sein, und ihre Axe dürfte nur parallel einer Queraxe verlaufen und sich in dieselbe Linie mit ihr projiciren; denn andere *Axenrichtungen* sind nicht möglich (Satz 16), und jede andere Annahme über ihre *absolute Lage* würde auf unerlaubte Hauptaxenlagen führen. Bewegungen um diese neue Queraxe und die ihr nächste parallele alte sind nach Hülfsatz II und IX zusammen äquivalent einer Deckschiebung, die sich in die Queraxe projicirt, und deren zur Hauptaxe parallele Komponente ebenfalls eine Deckschiebung sein muss (wie vorher); so dass nur diese betrachtet zu werden braucht. — Eine solche Schiebung wäre also die einzig mögliche Deckbewegung für einen der neuen Punkte. Nun giebt es in derselben Richtung schon die Deckschiebung λ , welche aus den alten Queraxen folgt und daher verschieden von der neuen sein muss; und nach dem Hülfsatz müssen sich beide als Vielfache einer und derselben kleinsten Deckschiebung ε ergeben. Wenn aber ε die kleinste Deckschiebung längs der Hauptaxe ist, so ist die zur Hauptaxe gehörige Deckbewegung nach Satz 47 $= A_{\frac{2\pi}{n}, \frac{p \cdot \varepsilon}{n}}$ und nicht mehr: $A_{\frac{2\pi}{n}, \frac{p \cdot \lambda}{n}}$. Dann gelangt man also zu irgend einem einfachen System des vorigen Capitels, welches durch die Deckbewegung um die Queraxe verdoppelt wird. Dadurch zeigt sich also, dass ein solches verdoppeltes System das einzig mögliche mit gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen ist. —

Es ist für die Anschauung erleichternd, bei manchem der folgenden Systeme mehrere Punkte zu engeren Gruppen zusammenzufassen, die dann mit eigenen Namen versehen werden. So heisse *gewundene Säule* die Gesammtheit der Eckpunkte zweier kongruenter regelmässiger Vielecke, die in parallelen Ebenen mit den Mittelpunkten gerade übereinander liegen, deren Seiten aber nicht parallel laufen; dabei denke man sich die Verbindungslinien von den Ecken des einen

Vielecks nach den 2 nächsten Ecken des anderen gezogen. Die Projektion einer gewundenen Säule auf die Ebene einer ihrer Endflächen bildet ein halbbregelmässiges $2n$ -eck.

Gleichflächiges Tetraëder, Rhombentetraëder oder rhombisches Sphenoid ist der Halbflächner des Rhombenoktaëders; es entspricht der gewundenen Säule, wenn das Vieleck ein Zweieck (ein Punktpaar) ist. Es ist von 4 kongruenten spitzwinkligen Dreiecken begrenzt, und wird folglich einfach dadurch konstruirt, dass man in einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck die Seitenmitten verbindet und die 4 so gebildeten Dreiecke zusammenfaltet. Je nachdem man nach der einen oder der anderen Seite zusammenfaltet, entstehen 2 symmetrische (oder nach Naumann enantiomorphe) Körper, die sich wie Objekt und Spiegelbild gleichen und auf keine Art miteinander zur Deckung zu bringen sind. Jedes hat die Eigenschaft, durch zweizählige Drehungen um 3 durch sein Centrum gelegte, aufeinander senkrechte Axen, die in den Mitten zweier Gegenkanten auf letzteren senkrecht stehn, mit sich selbst zur Deckung zu gelangen.

Schon bei den Systemen des vorigen Capitels ist darauf aufmerksam gemacht, dass die kongruenten n -ecke der Projektionsfigur beliebig um ihre Mittelpunkte gedreht werden dürfen, sofern sie nur sämmtlich untereinander parallel bleiben. Jede neue Lage, die man ihnen so geben mag, liefert also ein System von einem gewissen individuellen Charakter. Ganz entsprechende und nur noch auffallendere Specialarten von Punktsystemen finden sich in diesem Capitel. Es ist nun nicht unwahrscheinlich, dass gewisse, besonders einfache Specialfälle als stabile Gleichgewichtslagen der Krystallelemente gerade besonders häufig in der Natur realisirt sind. Aus diesem Grunde sind zum Schluss jeder Abtheilung dieses Capitels einige der bemerkenswerthesten Specialfälle zusammengestellt.

§ 16. Konstruktion der Systeme mit 6-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 6-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 26—28) nur eine Hauptaxenart. Daher müssen die entgegengesetzt gerichteten Axen

der beiden ineinander stehenden Theilsysteme in dieselben Linien fallen; und folglich ist (nach Satz 48)

die Projektionsfigur aller Systeme dieser Abtheilung auf eine Hauptebene aus den Ecken kongruenter paralleler halbreghelmässiger Zwölfecke gebildet, die sich gleiche Seiten gerade zuwenden, und deren Centra in den Hauptaxen liegen

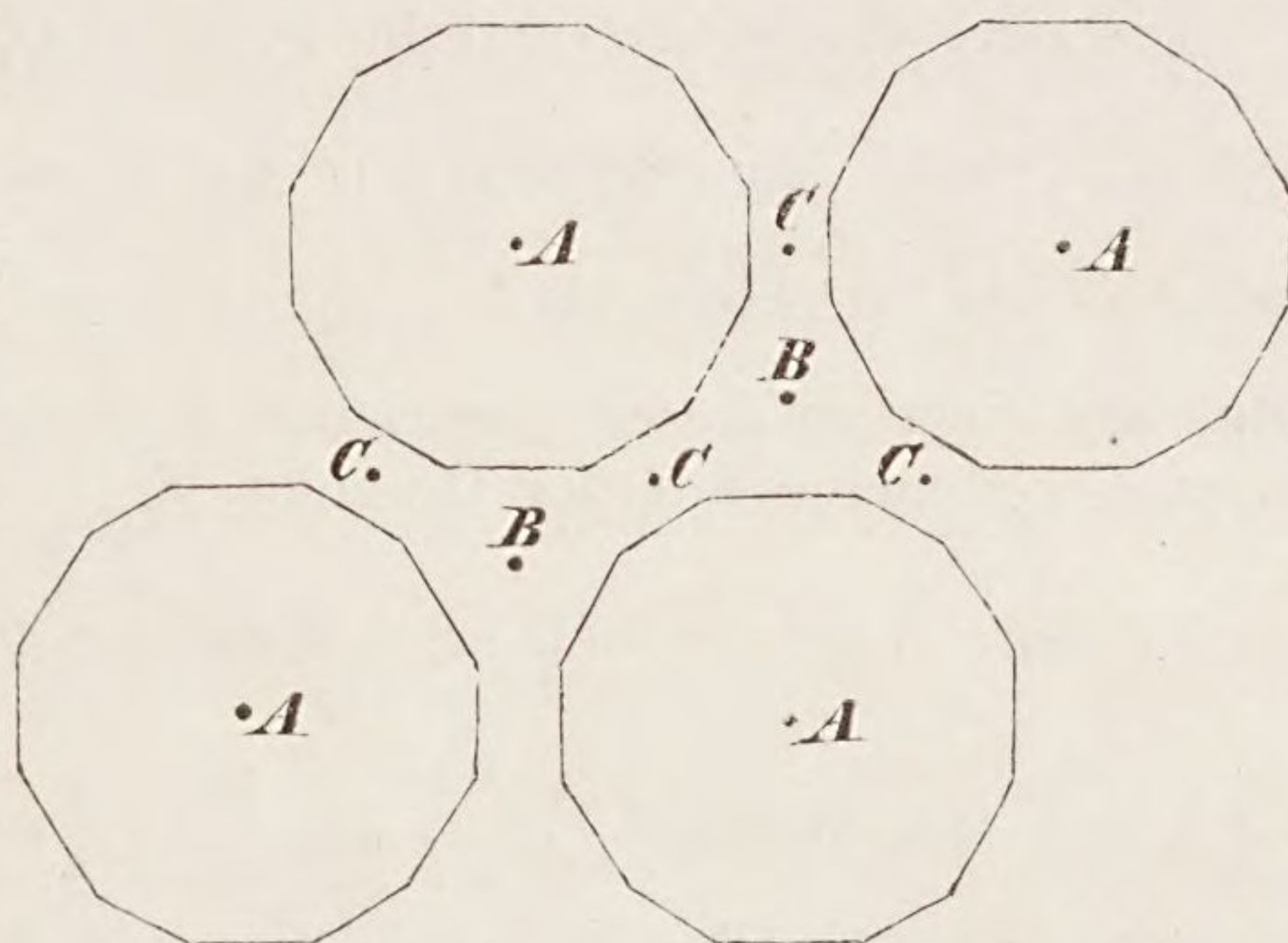


Fig. 33.

(Fig. 33).

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung werden aus den 6-zähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung abgeleitet durch 2-zählige Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine Queraxe,

deren Projektion auf eine Hauptebene in eine Seite oder Höhe einer der dreieckigen Maschen fällt, die durch die Gesamtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Im Uebrigen ist die Lage der Konstruktionsaxe willkürlich. Die eine Art von Queraxen Q verläuft parallel den Seiten, die andere Art Q' parallel den Höhen der erwähnten dreieckigen Maschen; und zwar projiciren sich Drehaxen in die Seiten und Höhen dieser Maschen selbst, dagegen Schraubenaxen, deren Schiebungs-komponente bezüglich gleich der halben Maschenseite oder halben Maschenhöhe ($h = \frac{e}{2}\sqrt{3}$) ist, mitten zwischen 2 nächste parallele Seiten oder Höhen. Die Schnittpunkte aller gleichgerichteten Queraxen Q bilden mit einer auf ihnen senkrechten Ebene ein gewisses *Schnittpunktsnetz*; ebenso alle gleichgerichteten Q' mit einer auf ihnen senkrechten Ebene.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, zusammengesetzte 6-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. IV. Fig. 48, 49), $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm \frac{\lambda}{6}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, unterscheidet sich vom einfachen 6-punktschraubensystem nur

1) früher: sechszähliges Doppelschraubensystem.

dadurch, dass Punktpaare an Stelle der dortigen einfachen Punkte eintreten.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in e fallende Queraxe ziehen nach Hülfsatz II das Vorhandensein einer parallelen zweizähligen Drehaxe nach sich, von der vorigen um $\frac{\lambda}{2}$ entfernt. Ebenso folgt aus einer zu dieser Axenrichtung unter 60° geneigten Deckschiebung e , verbunden mit der Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ nach Hülfsatz II Zusatz 2 die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$, von der vorigen um die halbe Maschenhöhe, d. h. um $\frac{h}{2} = \frac{e}{4}\sqrt{3}$, entfernt. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Axen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{h}{2}$. — Eine in h fallende, also mit den vorigen Axen 30° einschliessende, Queraxe Q' trifft eine Hauptaxe nicht in demselben Punkte, wo letztere von einer der vorigen Axen Q getroffen wird, sondern um $\frac{\lambda}{12}$ davon entfernt; denn nur so geht durch Q' aus Q jene Axe hervor, welche aus ihr auch durch die Bewegung $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{6}}$ hervorgeht. — Nun folgt nach Hülfsatz II aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und λ die Existenz einer parallelen zweizähligen Drehaxe im Abstände $\frac{\lambda}{2}$, und aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und der zu ihr unter 30° geneigten Deckschiebung e die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q'_{\frac{2\pi}{2}, h}$ im Abstände $\frac{e}{4}$. Also hat dieses Schnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e}{4}$. In beiden Netzen sind die Maschenseiten parallel und senkrecht zur Hauptaxe. — Durch die Bewegung $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{6}}$ werden beide Queraxenschaaren in neue Lagen geführt.

3) und 4) *Das rechte, resp. linke, zweigängige zusammengesetzte 6-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. IV. Fig. 50, 51) $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm \frac{\lambda}{3}}$, $\lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Statt das System als zweigängiges 6-punktschraubensystem, jedoch mit Punktpaaren an Stelle einfacher Punkte,

1) früher: Treppensystem des Rhombenoktaëders.

anzusehn, kann man sich von ihm folgende anschauliche Vorstellung bilden. Im entsprechenden System des vorigen Capitels liegen immer 2 Punkte in den Enden eines Durchmessers des Schraubencylinders; fasst man nun im vorliegenden System 2 nächstbenachbarte solche Durchmesser, die dem einen und anderen der 2 ineinander stehenden Theilsysteme angehören, in Gedanken zusammen, so bestimmen ihre Endpunkte ein *gleichflächiges Tetraëder*. Das ganze System besteht aus Schichten von solchen kongruenten parallelen Tetraëdern, deren Centra ein Netz gleichseitig dreieckiger Maschen bilden, und deren 3 Drehungsaxen parallel sind zur Hauptaxe, zu einer Seite und der zugehörigen Höhe der dreieckigen Masche. Die Nachbarschicht entsteht aus der vorigen durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{3}}$. Drei aufeinander folgende

Schichten geben dieselbe Projektion wie das ganze System; jedes der Zwölfecke in der Fig. ist die Projektion dreier, und zugleich unendlich vieler, solcher Tetraëder.

Die beiden Schnittpunktsnetze der Queraxen Q und Q' stimmen mit denen des vorigen Systems überein, denn die Deckschiebungen λ und e sind dieselben wie dort; aber die gegenseitige Lage beider Axenschaaren ist eine andere; denn die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' geschnitten wird, haben hier den Abstand $\frac{\lambda}{6}$, während er dort $\frac{\lambda}{12}$ betrug. Der Beweis dafür ist derselbe wie dort.

5) *Das dreigängige zusammengesetzte 6-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. IV. Fig. 52) $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Hier stehn

immer 2 Dreiecke, dem einen und anderen der beiden Theilsysteme angehörend, benachbart übereinander; ihre Ecken bestimmen eine gewundene dreiseitige Säule. Jede Hauptaxe ist mit solchen kongruenten gewundenen Säulen besetzt, die abwechselnd um 60° um ihre Axe gegeneinander gedreht sind. Jedes Zwölfeck der Fig. ist die Projektion von 2, und zugleich von unendlich vielen, gewundenen Säulen, die auf dieselbe Hauptaxe aufgereiht sind.

Die Schnittpunktsnetze der Q und Q' sind dieselben wie vorher,

1) früher: Doppelsystem der Sternsäule.

denn die Deckschiebungen λ und e sind dieselben; jedoch haben beide Axenschaaren eine andere gegenseitige Lage; denn die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' geschnitten wird, haben jetzt den Abstand $\frac{\lambda}{4}$.

6) *Das zusammengesetzte Hexagonalsäulensystem*¹⁾ (Taf. IV. Fig. 53) $A_{\frac{2\pi}{6}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Es stehn immer 2 Sechsecke, angehörend dem einen und anderen Theilsystem, benachbart übereinander; ihre Ecken bestimmen eine gewundene sechsseitige Säule; jedes Zwölfeck der Fig. ist die Projektion einer solchen. Die Figur ist die Projektion von 2 benachbarten Hauptebenen; das ganze System ist aus solchen Hauptebenenpaaren, deren Mittelebenen äquidistant übereinander liegen, zusammengesetzt.

Die Schnittpunktsnetze der Q und der Q' sind wieder dieselben wie vorher, weil die Deckschiebungen λ und e dieselben sind. Jetzt aber treffen Queraxen Q und Q' eine Hauptaxe in demselben Punkte. Daher verlaufen in jeder Ebene mitten zwischen 2 nächsten Hauptebenen die Queraxen aller vorkommenden Richtungen zugleich.

Einige Specialfälle: Die Zwölfecke der Projektionsfigur können sich auf Sechsecke reduciren; letztere kehren einander dann die Ecken oder die Seiten gerade zu; dabei kann jedes Sechseck von Quadraten und gleichseitigen Dreiecken umgeben sein, oder nur von gleichseitigen Dreiecken; oder alle Sechsecke liegen mit den Seiten aneinander, wie Bienenzellen. Ferner kann sich jedes Zwölfeck auf seinen Mittelpunkt zusammenziehen; diese Figur entsteht, wenn die gewundene sechsseitige Säule auf ein Punktpaar (in der Säulenaxe) oder sogar nur auf ihren Mittelpunkt reducirt ist; im letzteren Falle ist das System in das Raumgitter der regelmässig dreiseitigen Säule übergegangen. Sodann kann das Zwölfeck ein ganz regelmässiges sein; die in ein solches sich projicirende gewundene sechsseitige Säule ist durch ihre grosse Symmetrie ausgezeichnet. Die einzelnen Punktpaare können den Hauptebenen parallel sein; so kann auch die gewundene Säule in das Zwölfeck der Projektionsfigur selbst übergehen; u. s. f.

1) früher: System der gewundenen Säule.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) und 2) Rechtes, linkes, zusammengesetztes 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm \frac{\lambda}{6}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) und 4) Rechtes, linkes, zweigängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

5) Dreigängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{6}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

6) Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{6}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 17. Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 4-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 29—33) zwei verschiedene Hauptaxenarten. Daher giebt es 2 Möglichkeiten, ein solches System durch Umwenden zu verdoppeln, indem jede der beiden Axenarten A , B beim Umwenden entweder mit sich selbst, oder mit der anderen zur Deckung kommt.

α) Jede Axenart kommt mit sich selbst zur Deckung. Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 48 aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbreghelmässigen Achtecken, die sich gleiche Seiten gerade zuwenden, und deren Centra in den Hauptaxen von einerlei Benennung (A) liegen (Fig. 34).

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehen aus den 4-zähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch zweizählige Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um

eine Queraxe, deren Projektion auf eine Hauptebene in eine Seite a oder Diagonale e einer

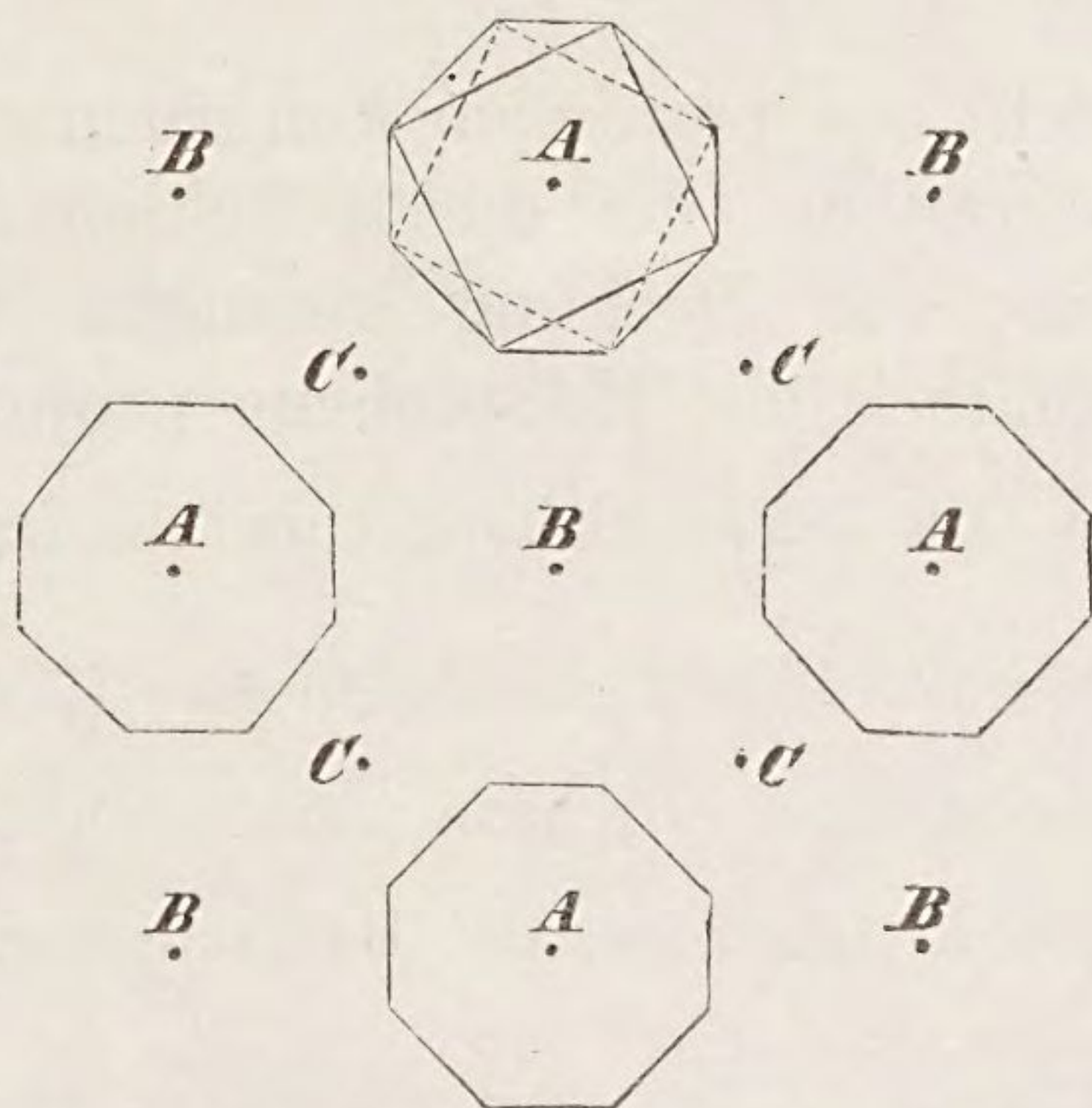


Fig. 34.

der quadratischen Maschen fällt, die durch die Gesammtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Im Uebrigen ist die Lage dieser Konstruktionsaxe willkürlich. Die eine Art von Queraxen Q verläuft parallel den Seiten, die andere Q' parallel den Diagonalen jener Maschen. (Und zwar projeciren sich Drehaxen in die Seiten und Diagonalen der Maschen, Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ mitten zwischen 2 nächste parallele Seiten.

Einige Systeme haben auch noch Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$, deren Projektionen in die Maschendiagonalen fallen.) Wegen späterer Anwendung im folgenden Capitel wird bei den Systemen dieses und des folgenden § die Anordnung der Queraxen noch besonders durch Figuren veranschaulicht. Um beide Schnittpunktsnetze und zugleich das Axénschnittpunktsnetz der Hauptebene zu übersehen, werden die beiden ersteren in die Hauptebene umgeklappt. In den hergehörigen Figuren sind dann LL' und $L'L''$ die Linien, in welchen die Hauptebene von der einen und der anderen derjenigen 2 Ebenen geschnitten wird, welche die fraglichen Schnittpunktsnetze tragen; um diese Linien ist also das Umklappen ausgeführt. In den umgeklappten Netzen sind die Schnittpunkte der Schraubenaxen durch Kreuze bezeichnet, die der Drehaxen durch Punkte.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, zusammengesetzte 4-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. III. Fig. 32, 33) $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ be-

steht aus parallelen kongruenten zusammengesetzten 4-punktschrauben, die durch Schiebungen e , senkrecht zur Hauptaxe, zur Deckung gelangen, und deren jede sich in ein Achteck der Hauptebene projecirt.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in a fallende Queraxe ziehen nach Hülfsatz II das Vorhandensein einer parallelen zweizähligen Drehaxe nach sich, von der vorigen um $\frac{\lambda}{2}$ entfernt. Ebenso folgt aus der Deckschiebung e und der Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ nach Hülfsatz II Zus. 2 die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$,

1) früher: vierzähliges Doppelschraubensystem.

von der vorigen um $\frac{a}{2}$ entfernt. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Axen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{a}{2}$ (Fig. 35). — Eine in e fallende, also mit den vorigen Axen 45° einschliessende, Queraxe Q' trifft eine Hauptaxe nicht in demselben Punkte, wo letztere von einer der vorigen Queraxen Q getroffen wird, sondern um $\frac{\lambda}{8}$ davon entfernt; denn nur so geht durch Q' aus Q jene Axe hervor, welche aus ihr auch durch die Bewegung $A_{2\pi, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ hervorgeht. — Nun folgt nach Hilfsatz II aus $Q'_{2\pi, 0}$ und λ die Existenz einer parallelen zweizähligen Drehaxe im Abstände $\frac{\lambda}{2}$, und aus $Q'_{2\pi, 0}$

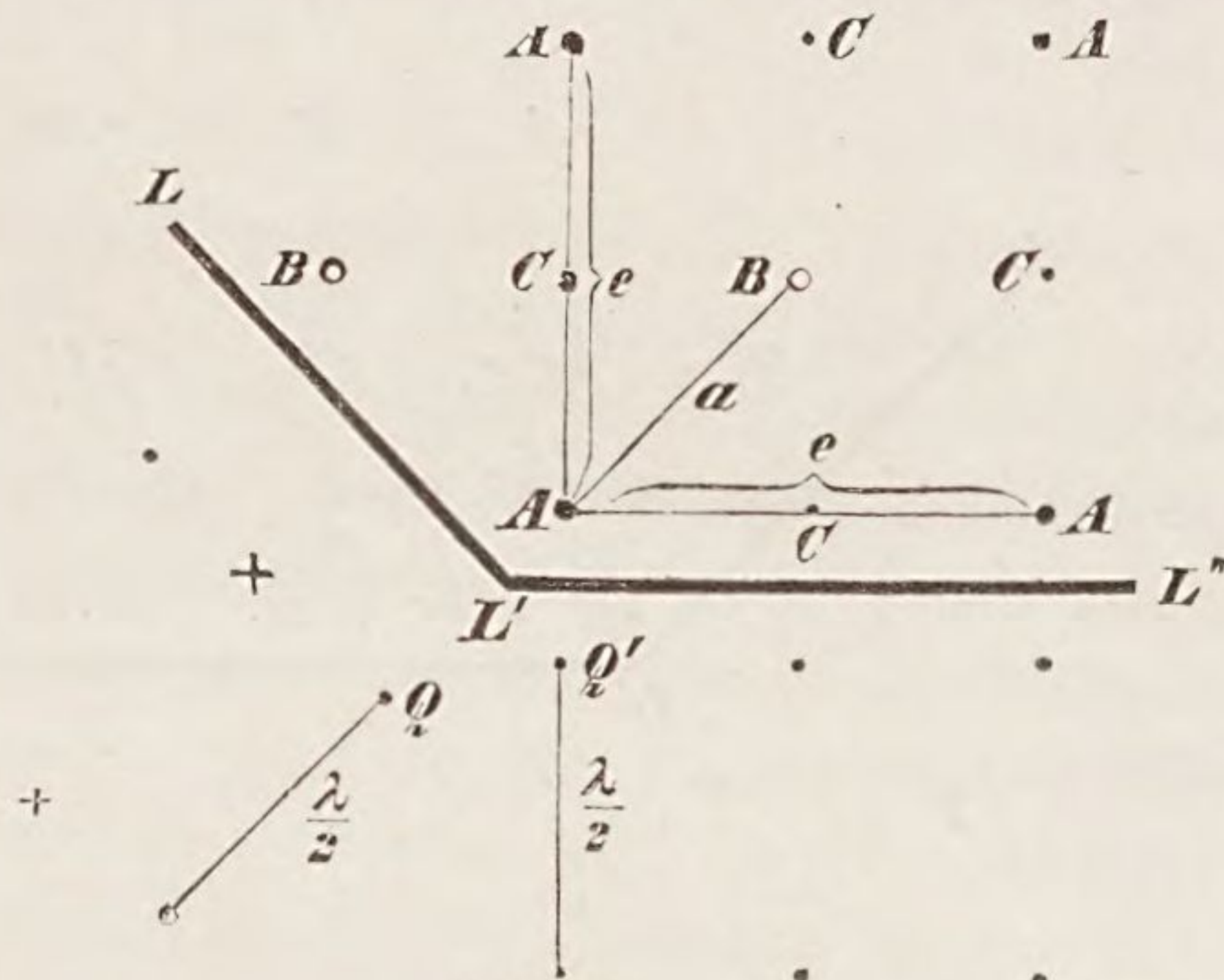


Fig. 35.

und e die Existenz noch einer parallelen Drehaxe im Abstände $\frac{e}{2}$. Also hat dieses Schnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e}{2}$. In beiden Schnittpunktsnetzen sind die Maschenseiten parallel und senkrecht zur Hauptaxe.

3) *Das vierzählige zusammengesetzte Gegenschraubensystem*¹⁾ (Taf. III. Fig. 34) $A_{2\pi, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{2\pi, 0}$ lässt sich ansehen als bestehend aus 2 kongruenten zusammengesetzten Schraubensystemen, die parallelaxig so ineinanderstehn, dass die Schraubenaxen des einen mitten zwischen je 4 solchen des anderen verlaufen, und dass das eine gegen das andere um die halbe Schraubenhöhe gehoben ist. Die einander zugewandten Punktpaare von 4 zunächst um eine Axe B herumstehenden Schrauben A bilden eine zusammengesetzte Vierpunktschraube von entgegengesetztem Windungssinn als die Schrauben um A , aber von gleicher Schraubenhöhe.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{2\pi, 0}$ um eine in a

1) früher: Doppelsystem der Gegenschrauben.

fallende Queraxe sind äquivalent der zweizähligen Drehung um eine parallele Axe, die von der ersteren um $\frac{\lambda}{2}$ absteht. Ebenso folgt aus der Deckschiebung σ , deren Projektionen auf die Hauptebene und auf die Hauptaxe resp. e und $\frac{\lambda}{2}$ sind, und aus $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ die Existenz einer parallelen zweizähligen Schraubenaxe q , die um $\frac{\lambda}{4}$ höher als die vorige liegt (gerechnet von einer Hauptebene aus), und um $\frac{a}{2}$ zur Seite ge-

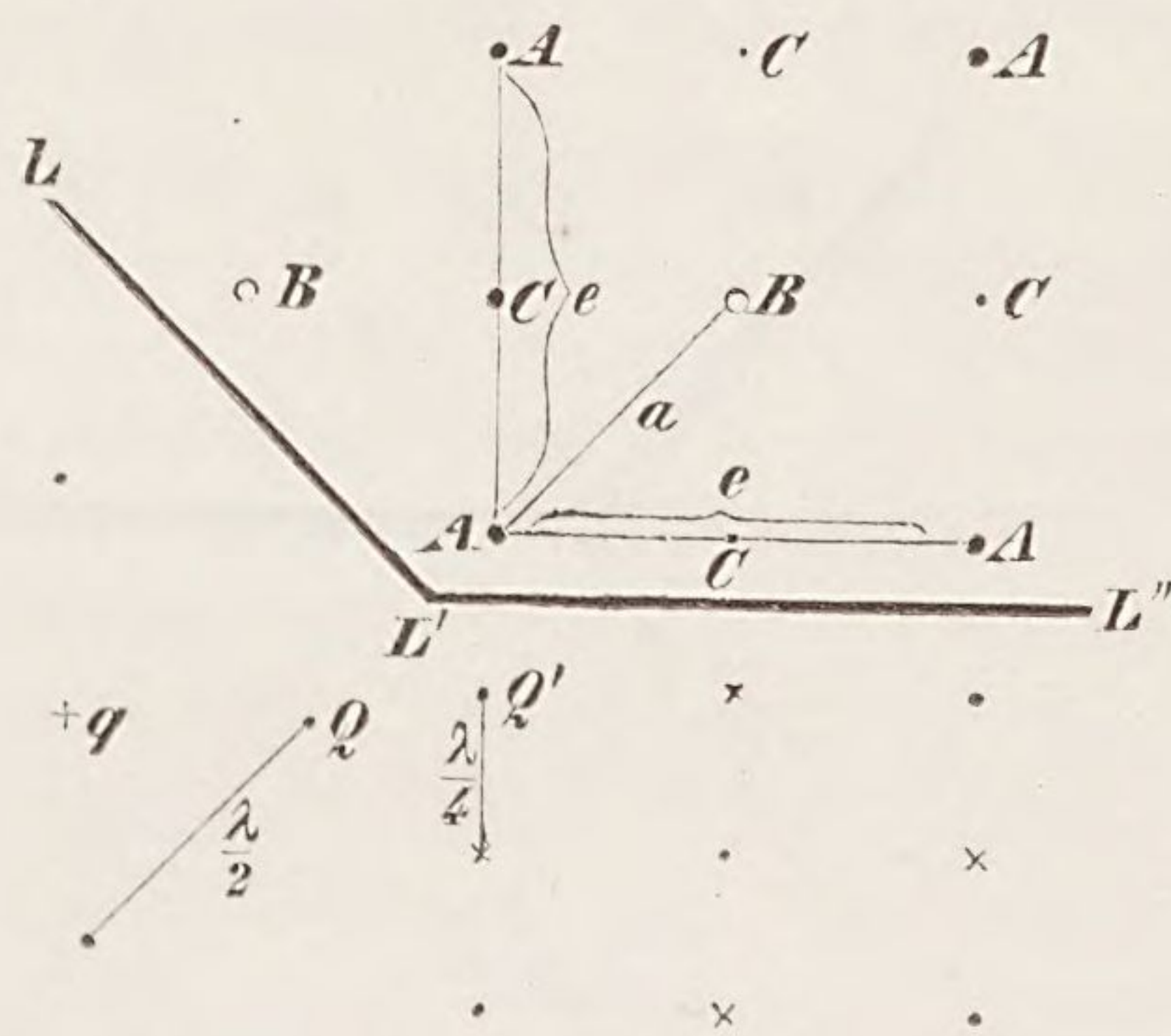


Fig. 36.

rückt. Diese 3 parallelen Queraxen bestimmen ein Schnittpunktsnetz, gebildet aus rhombischen Maschen, deren Diagonalen der Hauptaxe und Hauptebene parallel sind und die Grösse $\frac{\lambda}{2}$ und a haben (Fig. 36). — Eine in e fallende Queraxe Q' trifft eine Hauptaxe um $\frac{\lambda}{8}$ entfernt vom Schnitt

derselben mit einer der vorigen Q (was wie beim vorigen System erhellt). Aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und λ folgt die Existenz einer parallelen, um $\frac{\lambda}{2}$ entfernten Drehaxe. Aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und der auf ihr senkrechten Deckschiebung σ folgt eine parallele Drehaxe, die um $\frac{\lambda}{4}$ höher und um $\frac{e}{2}$ zur Seite gerückt ist. Endlich aus $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und derjenigen Deckschiebung σ , die mit Q' und einer Hauptaxe in derselben Ebene liegt, folgt die Existenz einer zweizähligen parallelen Schraubenaxe $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$, die um $\frac{\lambda}{4}$ höher als $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ liegt. Diese Queraxen bestimmen ein Schnittpunktsnetz mit rechteckigen Maschen, deren zur Hauptaxe und Hauptebene parallele Seiten resp. $= \frac{\lambda}{4}$ und $= \frac{e}{2}$ sind.

4) Das zweigängige zusammengesetzte 4-punktschraubensystem¹⁾

1) früher: System der gekreuzten Rhombentetraëder.

(Taf. III. Fig. 35) $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ unterscheidet sich von dem entsprechenden einfachen System nur durch das Auftreten von Punktpaaren statt der einfachen Punkte. Anschaulicher ist aber folgende Auffassung. Zwei nächstbenachbarte Hauptebenen bilden eine Schicht kongruenter paralleler gleichflächiger Tetraëder, deren Centra als quadratisches Maschennetz angeordnet sind, und deren Drehaxen der Hauptaxe und den Maschenseiten (oder statt der letzteren auch den Maschendiagonalen) parallel laufen. Die nächstfolgende Schicht ist der vorhergehenden kongruent, jedoch um 90° um eine Hauptaxe gedreht. Somit trägt jede Hauptaxe in gleichen Abständen die Centra von kongruenten gleichflächigen Tetraëdern; doch sind letztere nur abwechselnd parallel, während die benachbarten gekreuzt stehn. — Man kann auch 2 einander zugewandte Grenzebenen zweier Nachbarschichten in Gedanken zusammenfassen; dann bilden sie ebenfalls eine Schicht von Tetraëdern; jedoch verlaufen die zur Hauptebene parallelen Drehaxen derselben unter 45° geneigt gegen diejenigen der vorigen Schichten.

Die Schnittpunktnetze der Queraxen stimmen mit denen des zusammengesetzten Schraubensystems 1) überein (Fig. 35), denn die Deckschiebungen λ und e sind dieselben wie dort; aber die gegenseitige Lage beider Netze ist eine andere; denn die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' geschnitten wird, haben hier den Abstand $\frac{\lambda}{4}$, während er dort $\frac{\lambda}{8}$ betrug. Der Beweis dafür ist derselbe wie dort.

5) *Das zusammengesetzte Quadratsäulensystem*¹⁾ (Taf. III. Fig. 36) $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Je 2 Quadrate, angehörend dem einen und dem anderen Theilsystem, stehn benachbart übereinander und bilden eine gewundene vierseitige Säule, deren Projektion auf die Hauptebene ein Achteck ist. Das ganze System besteht aus kongruenten parallelen gewundenen Säulen, deren Centra das Raumgitter der quadratischen Säule bilden. Die Projektion der Besetzung von 2 Nachbarhauptebenen auf eine von ihnen ist gleich der Projektion des ganzen Systems, das aus solchen Hauptebenenpaaren, deren Mittelebenen äquidistant aufeinanderfolgen, besteht.

1) früher: System der gewundenen Säule.

Weil die Deckschiebungen λ und e mit denen beim zusammengesetzten Schraubensystem 1) übereinstimmen, so sind beide Schnittpunktsnetze der Queraxen wieder dieselben wie dort (Fig. 35), jedoch wieder in anderer gegenseitiger Lage. Weil nämlich Queraxen Q und Q' eine Hauptaxe in demselben Punkte treffen, so verlaufen in einer Ebene mitten zwischen 2 Nachbarhauptebenen Queraxen von allen erlaubten Richtungen zugleich.

6) *Das zusammengesetzte Quadratoktaedersystem*¹⁾ (Taf. III. Fig. 37) $A_{\frac{2\pi}{4},0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, lässt sich ansehen als aus 2 parallel mitten ineinander stehenden kongruenten Systemen der vorigen Art bestehend, deren eins gegen das andere um die halbe Säulenhöhe $\left(\frac{\lambda}{2}\right)$ gehoben ist. Lauter parallele kongruente gewundene Säulen stehn so beisammen, dass ihre Centra ein quadratoktaëdrisches Raumgitter bilden.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen des zusammengesetzten Gegenschraubensystems 3) überein (Fig. 36), denn die Deckschiebungen λ und σ sind dieselben wie dort. Aber beide Netze haben hier eine andere gegenseitige Lage; während dort die Punkte, in denen eine Hauptaxe von 2 Nachbarqueraxen Q und Q' getroffen wird, um $\frac{\lambda}{8}$ von einander abstanden, ist dieser Abstand hier 0.

Einige Specialfälle. Die Achtecke der Projektionsfigur können sich auf Quadrate reduciren; letztere kehren einander dann die Ecken oder die Seiten gerade zu. Ferner kann sich jedes Achteck auf seinen Mittelpunkt zusammenziehen; diese Figur entsteht, wenn die gewundene vierseitige Säule auf ein Punktpaar (in der Säulenaxe) oder sogar nur auf ihren Mittelpunkt reducirt ist; im letzteren Falle ist das System in das Raumgitter der quadratischen Säule oder in das des Quadratoktaeders übergegangen. Die Achtecke können auch ganz aneinanderliegen, nur quadratische Lücken zwischen sich lassend. Sodann kann das Achteck ein ganz regelmässiges sein; die in ein solches sich projicirende gewundene vierseitige Säule ist besonders regelmässig. Die einzelnen Punktpaare können den Hauptebenen parallel sein; auch kann die gewundene Säule in das Achteck der Projektionsfigur selbst übergehn; u. s. f.

1) früher: Doppelsystem des Quadratoktaeders.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projecirt sich in a .)

1) und 2) Rechtes, linkes, zusammengesetztes 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{4}, 0}$.

3) Vierzähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

4) Zweigängiges zusammengesetztes 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

5) Zusammengesetztes Quadratsäulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

6) Zusammengesetztes Quadratoktaedersystem.

$$A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 18. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

β) Jede Axenart kommt beim Umwenden mit der anders benannten zur Deckung.

Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 49 aus 2 Schaaren kongruenter Quadrate, so dass die eine Schaar symmetrisch zwischen die andere hineingesetzt ist. (Textfig. 37.) Durch die Centra der Quadrate der einen Schaar gehn die Axen A , durch diejenigen der anderen Schaar die Axen B . Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehn aus den 4-zähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch zweizählige Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine Queraxe, deren Projektion

auf eine Hauptebene mitten zwischen 2 nächsten parallelen Seiten a der quadratischen Maschen verläuft, die durch die Gesammtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Die Lage dieser Konstruktionsaxe ist im Uebrigen willkürlich. Die eine Art von Queraxen Q verläuft parallel den

Seiten a , die andere Q' parallel den Diagonalen e jener

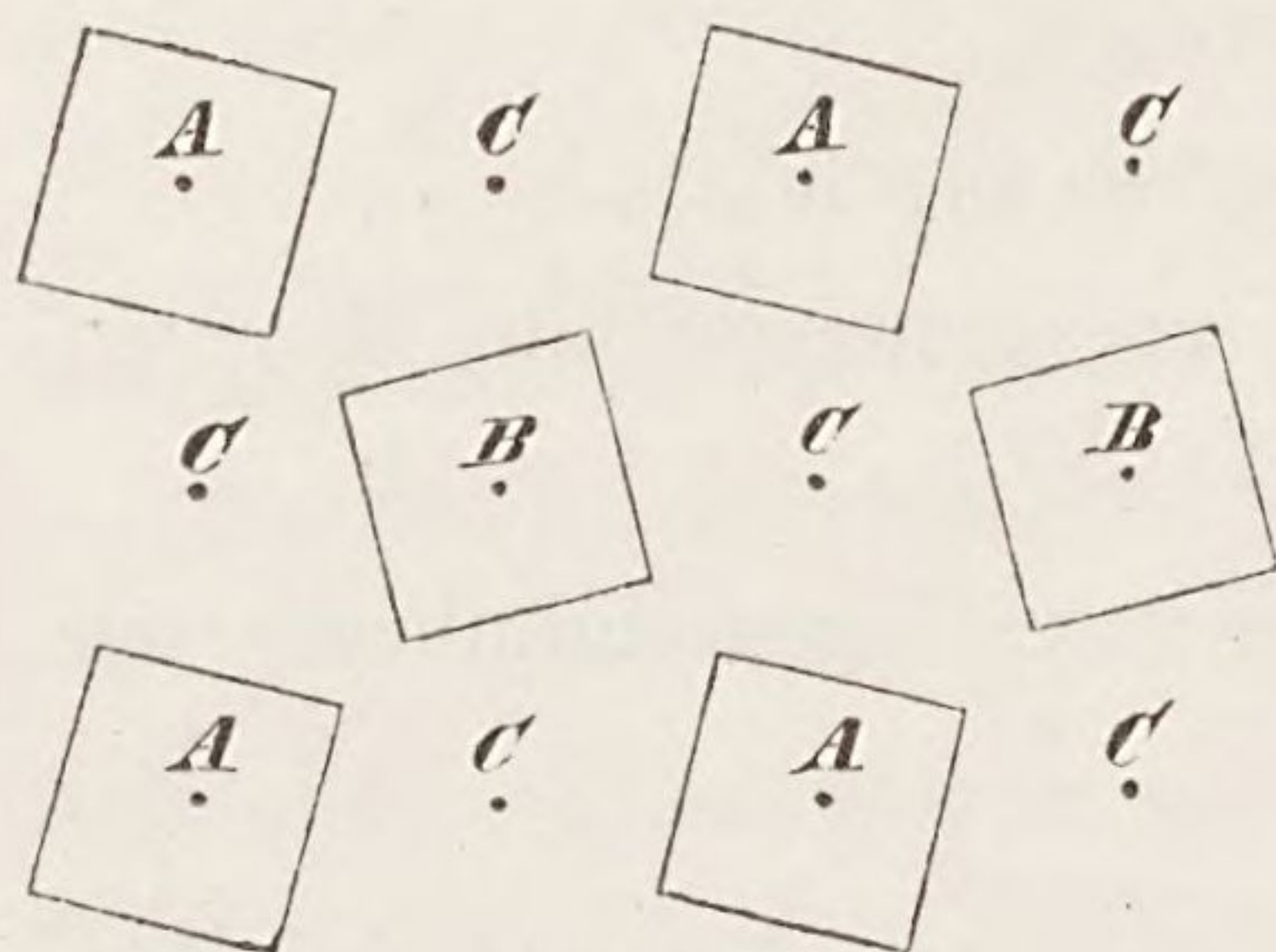


Fig. 37.

Maschen. (Und zwar projiciren sich Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$

in die Seiten a , Drehaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$

mitten zwischen sie; ferner Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$ mitten

zwischen 2 nächste parallele Diagonalen). Weil die ungleich benannten Hauptaxen nur dann zur Deckung bringbar

sind, wenn sie dieselbe Schiebungs-komponente der Schraubung besitzen [anderenfalls wären sie nicht gleich, also nicht deckbar], so ist es unmöglich das Gegenschraubensystem und das Quadratoktaedersystem zur Ableitung neuer Systeme der vorliegenden Abtheilung zu benutzen; denn bei ersterem sind beide Hauptaxenarten von entgegengesetztem Windungssinn $(A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ und $B_{\frac{2\pi}{4}, -\frac{\lambda}{4}})$, bei letzterem besteht die eine Art aus Drehungsaxen $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, die andere aus Schraubenaxen

$B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$. Also entspringen nur aus den 4 übrigen 4-zähligen

Systemen von einer Axenrichtung neue Systeme.

1) und 2) Das rechte, resp. linke, abwechselnde 4-punktschraubensystem¹⁾ (Taf. III. Fig. 38, 39) $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ be-

steht aus 2 ineinanderstehenden einfachen Schraubensystemen, so dass die Axen A des einen Systems in den Axen B des anderen liegen und dort nach entgegengesetzter Richtung verlaufen. Schreitet man von einer Schraube zur nächsten Schraube fort, so gehören die aufeinander folgenden abwechselnd dem einen und dem anderen Theilsystem an. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit einem quadratischen Punktgitter besetzt; die Figur ist die Projektion 8 solcher aufeinander folgender Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

1) früher: Zusammengesetztes vierzähliges Schraubensystem.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine zwischen zwei a verlaufende Queraxe ziehn nach Hülfsatz II das Vorhandensein einer parallelen Drehaxe nach sich, von der vorigen um $\frac{\lambda}{2}$ entfernt. Ebenso folgt aus der Deckschiebung e und der Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ nach Hülfsatz II, Zusatz 2 die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ um $\frac{a}{2}$ von der vorigen entfernt. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Axen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{a}{2}$. (Fig. 38.) Eine mitten

zwischen 2 nächsten parallelen Diagonalen e verlaufende Queraxe Q' muss eine Schraubenaxe sein; sie muss um $\frac{\lambda}{8}$ tiefer liegen (gerechnet von einer Hauptebene aus), als die vorige Queraxe Q ; denn nur so geht durch Q' aus Q jene Axe hervor, welche aus ihr auch durch die Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ hervorgeht. —

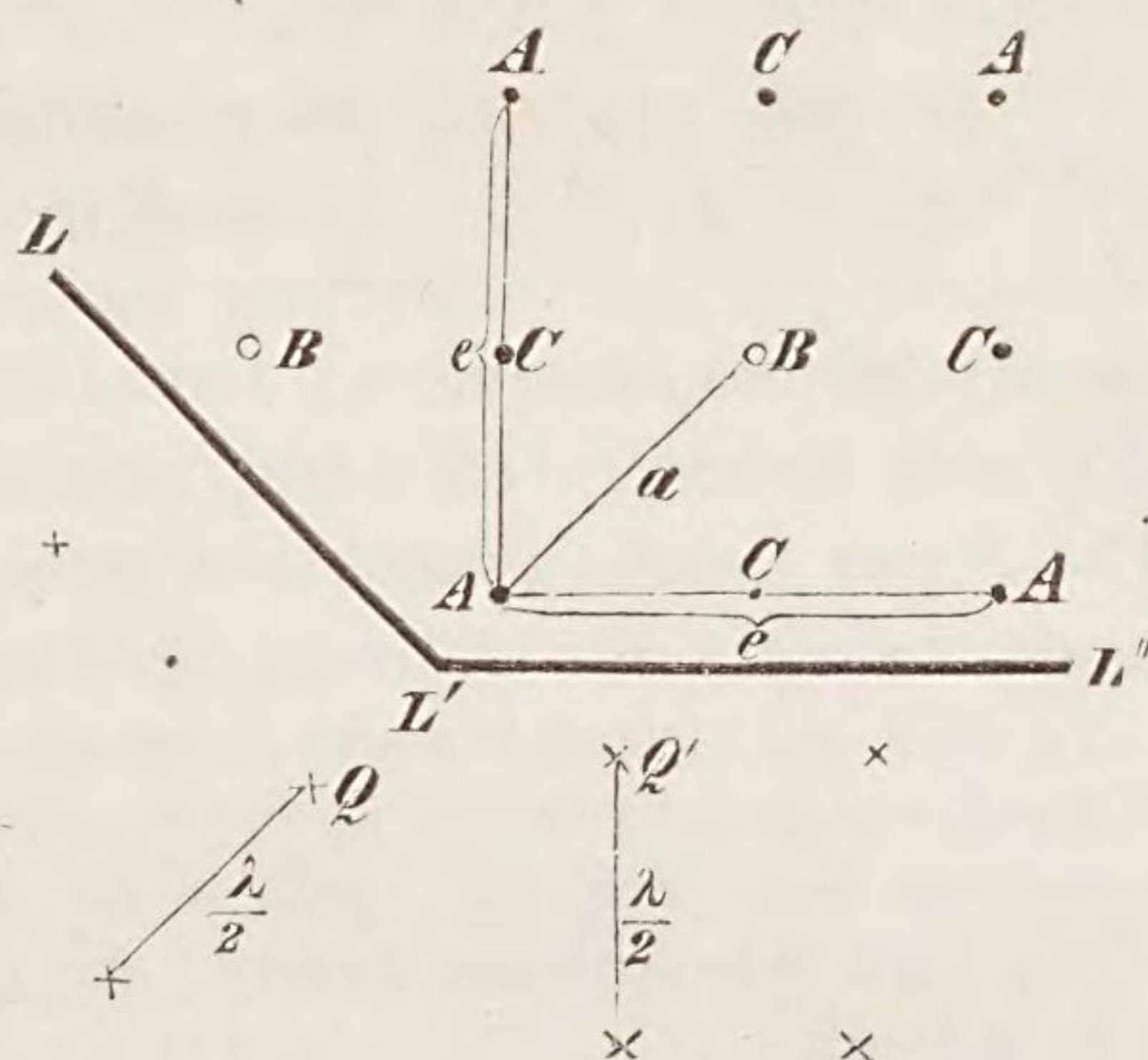


Fig. 38.

Nun folgt aus dieser Q' und der Deckschiebung λ wieder die Existenz einer parallelen zweizähligen Schraubenaxe im Abstände $\frac{\lambda}{2}$; und aus Q' und e folgt nach Zus. 1 zu Hülfsatz II die Existenz einer parallelen Schraubenaxe im Abstand $\frac{e}{2}$. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Axen dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e}{2}$. In beiden Schnittpunktsnetzen sind die Maschenseiten parallel und senkrecht zur Hauptaxe.

3) Das abwechselnde zweigängige 4-punktschraubensystem¹⁾ (Taf. III. Fig. 40), $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ besteht aus 2 ineinander stehenden zweigängigen 4-punktschraubensystemen, so dass die Axen A des einen Theilsystems in den Axen B des

1) früher: Zusammengesetztes Kreuzsprossensystem.

anderen liegen und dort nach entgegengesetzter Richtung verlaufen. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit Punktpaaren besetzt, die zusammen 2 beliebig ineinandergestellte kongruente quadratische Punktgitter bilden. Die Figur ist die Projektion 4 aufeinander folgender Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen des vorigen Systems überein, weil die Deckschiebungen λ und e dieselben sind wie dort (Fig. 38); aber die gegenseitige Lage beider Netze ist insofern eine andere, als die Queraxe Q' jetzt um $\frac{\lambda}{4}$ tiefer liegt als Q , gerechnet von einer Hauptebene aus, während dieser Abstand beim vorigen Systeme $\frac{\lambda}{8}$ betrug. Der Beweis ist wie dort.

4) *Das abwechselnde Quadratsäulensystem*¹⁾ (Taf. III. Fig. 41), $A_{\frac{2\pi}{4},0}$, λ , e , $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, besteht aus 2 ineinander gestellten Quadratsäulensystemen. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit den Eckpunkten kongruenter paralleler Quadrate besetzt. Die Figur ist die Projektion zweier benachbarter Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen der beiden vorigen Systeme überein, weil die Deckschiebungen λ und e dieselben sind (Fig. 38); jedoch ist die gegenseitige Lage der beiden Netze hier wieder eine andere, da Q' jetzt in derselben Hauptebene mit Q liegt.

Einige Specialfälle. Die Quadrate der Projektionsfigur können einander die Seiten oder die Ecken gerade zukehren; auch können sie sich zu Punkten reduciren, dies entspricht zwei ineinandergestellten kongruenten Raumgittern der quadratischen Säule. Ferner können jene Quadrate mit den Ecken zusammenstossen, rhombische Zwischenräume zwischen sich lassend. Ferner können 2 nächstbenachbarte besetzte Hauptebenen in eine Ebene zusammenfallen; u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projicirt sich mitten zwischen 2 benachbarte a .)

1) und 2) *Rechtes, resp. linkes, abwechselndes 4-punktschraubensystem.* $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}$, λ , e , $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$.

1) früher: Zusammengesetztes System der Quadratsäule.

3) *Abwechselndes zweigängiges 4-punktschraubensystem.*
 $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$

4) *Abwechselndes Quadratsäulensystem.* $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{a}{2}},$

§ 19. Konstruktion der Systeme mit 3-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 3-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 34—37) drei verschiedene Hauptaxenarten. Daher scheinen zunächst 3 Weisen denkbar, wie ein hergehöriges System durch Umwenden verdoppelt werden kann. *Entweder* kommt beim Umwenden jede der 3 Axenarten A, B, C mit sich selbst zur Deckung, — dies wird herbeigeführt durch zweizählige Drehung um eine Queraxe, die in die Verbindungslinie a zweier nächsten Hauptaxen fällt; — *oder* nur eine Art kommt mit sich selbst zur Deckung, während die beiden anderen Arten sich austauschen; — dies geschieht durch zweizählige Drehung um eine Queraxe, die in die Verbindungslinie e zweier nächsten *gleichen* Hauptaxen fällt; — *oder* alle 3 Axenarten tauschen sich aus; — dies geschieht durch Schraubung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{a}{2}}$ um eine Queraxe,

welche mitten zwischen 2 nächsten parallelen a verläuft. Aber bei Ausführung der letzteren Bewegung fällt eine umgewendete Axe B in A , und die umgewendete A in C ; folglich wäre eine umgewendete A deckbar sowohl mit der nicht gewendeten B , als mit der nicht gewendeten C ; also wären B und C untereinander deckbar, ohne umgewandt zu werden. Das ist aber nach Satz 37 unmöglich. Also fällt die dritte Art der Verdoppelung eines dreizähligen Systems durch Umwenden als unausführbar fort.

$\alpha)$ *Jede Axenart kommt mit sich selbst zur Deckung. Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 48 aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbregelmässigen Sechsecken, deren Centra in den Hauptaxen von einerlei Benennung (z. B. A) liegen, und deren Seiten parallel sind den Maschenseiten des durch diese Hauptaxenart gebildeten Netzes, also auch parallel den Höhen der durch alle Hauptaxen zusammen bestimmten dreieckigen Maschen (Fig. 39).*

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehen aus den dreizähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch

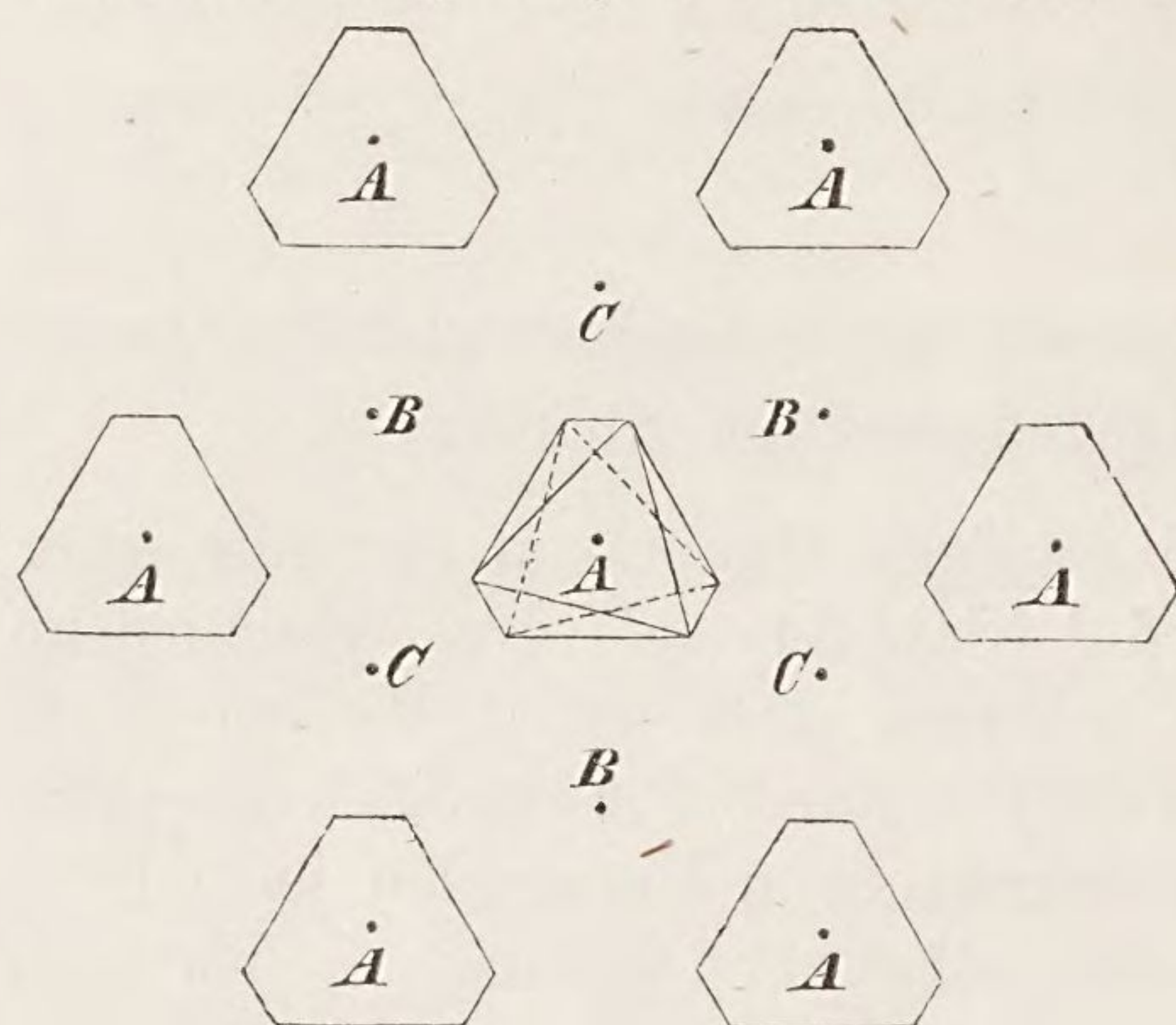


Fig. 39.

zweizählige Drehung

$Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine Queraxe, deren Projektion auf eine Hauptebene in eine Seite a einer der dreieckigen Maschen fällt, die durch die Gesamtheit der Hauptaxen bestimmt werden. Im Uebrigen ist die Lage dieser Konstruktionsaxe willkürlich. Die eine

Art von Queraxen, Q ,

verläuft in entgegengesetzten Richtungen als die andere Q' . (Und zwar projiciren sich Drehaxen in die a , Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{3a}{2}}$, parallel zu den a , mitten zwischen sie.)

1) und 2) Das rechte, resp. linke, zusammengesetzte 3-punktschraubensystem¹⁾ (Taf. II. Fig. 19, 20) $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$

besteht aus parallelen zusammengesetzten 3-punktschrauben, deren jede sich in ein halbreghelmässiges Sechseck projicirt.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in a fal-

lende Queraxe ziehn nach Hülfsatz II das Vorhandensein einer parallelen zweizähligen Drehaxe, im Abstände $\frac{\lambda}{2}$, nach sich. Ebenso folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und der dazu senkrechten Deckschiebung e die Existenz

einer parallelen zweizähligen Drehaxe, im Abstände $\frac{e}{2}$. Dagegen folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und einer zu ihr unter 30° geneigten Deckschiebung e (nach

Zus. 2 zu Hülfsatz II) die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{3a}{2}}$

im Abstände $\frac{e}{4}$. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Queraxen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und

1) früher: Dreizähliges Doppelschraubensystem.

$\frac{e}{4}$, welche resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. — Ganz ebenso beschaffen ist das Schnittpunktsnetz von untereinander gleichgerichteten Queraxen der anderen Gattung Q' . Eine Drehaxe Q und eine Q' , die nach einer um 60° abweichenden Richtung verläuft, treffen eine und dieselbe Hauptaxe in zwei um $\frac{\lambda}{6}$ entfernten Punkten.

3) *Das zusammengesetzte dreiseitige Säulensystem*¹⁾ (Taf. II. Fig. 21) $A_{\frac{2\pi}{3},0}$, λ , e , $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$. Je 2 gleichseitige Dreiecke, angehörend dem einen und dem anderen Theilsystem, stehn benachbart über einander und bilden eine gewundene dreiseitige Säule, deren Projektion auf die Hauptebene ein Sechseck ist. Das ganze System besteht aus kongruenten parallelen gewundenen Säulen, deren Centra das Raumgitter der regelmässig dreiseitigen Säule bilden. Die Projektion der Besetzung von 2 Nachbarhauptebenen auf eine von ihnen ist gleich der Projektion des ganzen Systems, das aus solchen Hauptebenenpaaren, deren Mittelebenen äquidistant aufeinander folgen, besteht.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen sind gleich denen beim vorigen System, weil die Deckbewegungen λ , e und $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ beiden Sy-

stemen gemeinsam sind. Jetzt aber treffen 2 Queraxen von beiden Arten Q und Q' eine Hauptaxe in demselben Punkt, so dass die gegenseitige Lage der beiden Schnittpunktsnetze hier eine andre ist wie vorher.

4) *Das zusammengesetzte Rhomboëdersystem*²⁾ (Taf. II. Fig. 22), $A_{\frac{2\pi}{3},0}$, λ , σ , $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ unterscheidet sich vom einfachen Rhomboëdersystem nur dadurch, dass gewundene Säulen statt der gleichseitigen Dreiecke eintreten. Also besteht das ganze System aus kongruenten parallelen gewundenen dreiseitigen Säulen, deren Centra ein rhomboëdrisches Raumgitter bilden. Die Projektion der Besetzung von 3 Paaren je benachbarter Hauptebenen auf eine von ihnen ist gleich der Projektion des ganzen Systems, das aus lauter solchen Ebenenpaaren besteht.

Das Schnittpunktsnetz der Queraxen Q ergibt sich so: (Fig. 40) Aus der durch a gelegten Querdrehaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und der Schiebung λ

1) früher: System der gewundenen dreiseitigen Säule.

2) früher: Doppel-Rhomboëdersystem.

können sich auf gleichseitige Dreiecke reduciren, so gelegen, dass ihre Seiten parallel sind den Seiten derjenigen Dreiecksmaschen, die durch die Centra bestimmt werden. Hierbei ist die weitere Specialisirung möglich, dass die Zwischenräume zwischen den Dreiecken regelmässige Sechsecke sind, wobei dann die ganze Ebene völlig erfüllt ist von solchen Sechsecken und den sie umkränzenden gleichseitigen Dreiecken. Ferner kann sich jedes Sechseck auf seinen Mittelpunkt zusammenziehen; diese Figur, ein Netz mit gleichseitig dreieckigen Maschen, entsteht, wenn die gewundene dreiseitige Säule auf ein Punktpaar (in der Säulenaxe) oder sogar nur auf ihren Mittelpunkt reducirt ist; im letzteren Falle ist das System in das Raumgitter der regelmässig dreiseitigen Säule oder in das rhomboëdrische Raumgitter übergegangen. Sodann kann das Sechseck ein regelmässiges sein; die in ein solches sich projecirende gewundene Säule ist besonders regelmässig; hierbei kann die weitere Specialisirung eintreten, dass die ganze Ebene mit unmittelbar aneinander liegenden kongruenten regelmässigen Sechsecken erfüllt ist (Bienenzellen). — Die einzelnen Punktpaare können den Hauptebenen parallel sein; auch kann die gewundene Säule in das Sechseck der Projektionsfigur selbst übergehn, u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projecirt sich in a .)

1) und 2) Rechtes, resp. linkes, zusammengesetztes 3-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

4) Zusammengesetztes Rhomboëdersystem.

$$A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 20. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit dreizähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

β) *Eine Axenart kommt beim Umwenden mit sich selbst zur Deckung, die beiden anderen tauschen sich aus.*

Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 50 aus kongruenten parallelen halbregelmässigen Sechsecken, sie ist aber auch ansehbar als gebildet aus 2 symmetrisch in-
einander stehenden Gruppen kongruenter gleichseitiger Dreiecke. (Fig. 41.) Indem zur Ableitung dieser Systeme aus den-
jenigen mit 3-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Rich-
tung die Drehung um eine Queraxe dient, welche in den
Abstand e zweier nächsten gleichen Hauptaxen (z. B. A) fällt,

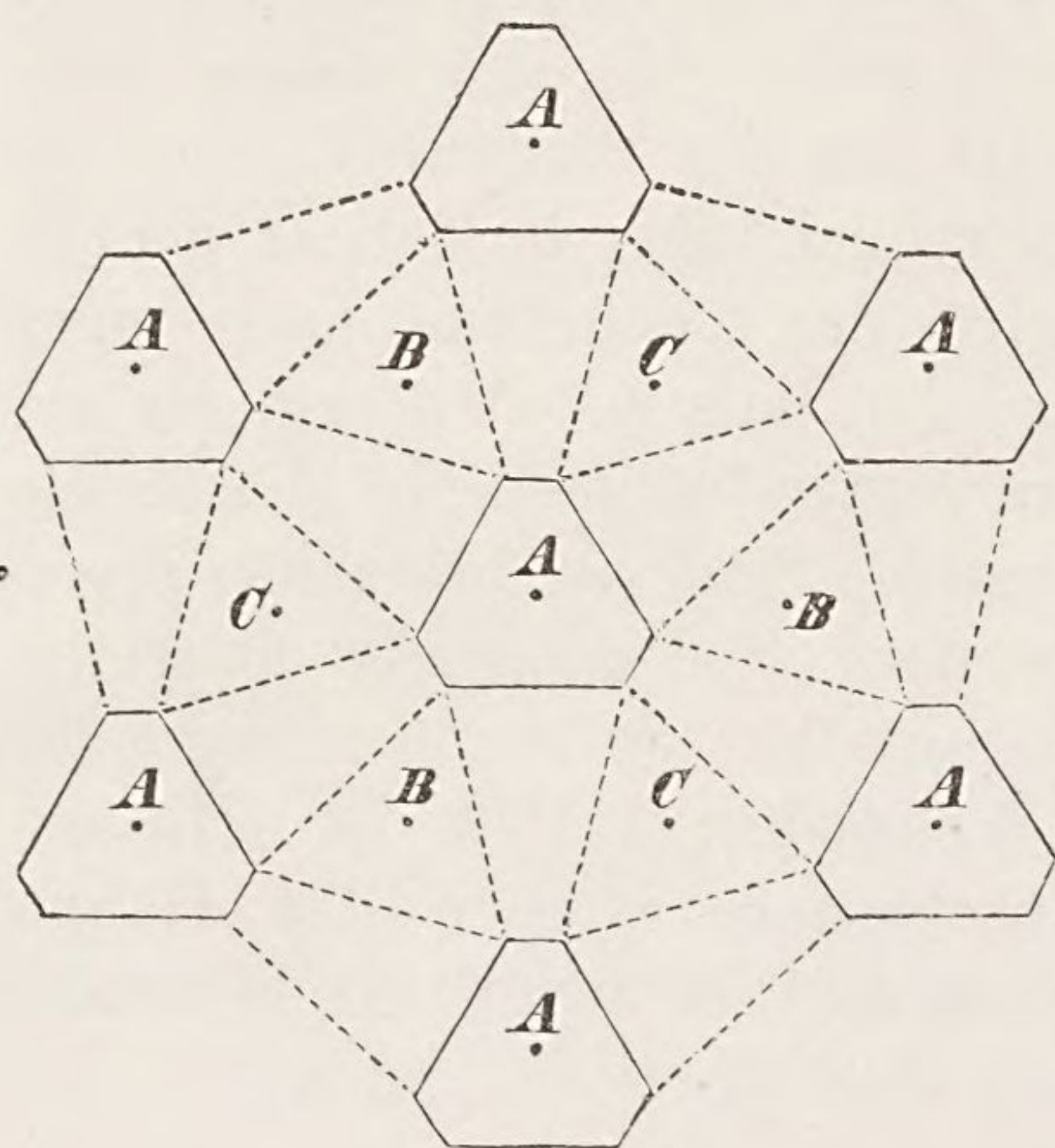


Fig. 41.

so liegen die Centra aller halbregelmässigen Sechsecke in diesen Hauptaxen A , und ihre Seiten sind parallel den Höhen der durch diese Hauptaxen A bestimmten gleichseitigen Dreiecke, also auch parallel den Seiten der durch die Gesamtheit aller Hauptaxen bestimmten gleichseitig dreieckigen Maschen. Fasst man dagegen alle Punkte der Projektionsfigur zu Dreiecken zusammen, so liegen die Centra der Dreiecke

erster Stellung in der einen Hauptaxenart (z. B. B), die der Dreiecke zweiter Stellung in der anderen Hauptaxenart (z. B. C), so dass die Gesamtheit aller Dreieckscentra ein Netz von regelmässig sechseckigen Maschen (Bienenzellen) bestimmt. Da die beiden Dreiecksgruppen den beiden ineinander stehenden einfachen Theilsystemen entsprechen, so lässt diese Auffassung der Projektionsfigur die Analogie mit den 4-zähligen Systemen des § 18 deutlich erkennen. Die Konstruktionsaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ liegt im Abstände e zweier nächsten

gleichen Hauptaxen, sonst aber beliebig. Die eine Art von Queraxen Q verläuft in entgegengesetzten Richtungen als die andere Q' . (Drehaxen projiciren sich in die Seiten der durch die eine Axenart (A) bestimmten gleichseitigen Dreiecke; Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$, parallel zu ihnen, mitten zwischen

sie.) Weil die ungleich benannten Hauptaxen nur dann zur Deckung bringbar sind, wenn sie dieselbe Schiebungs-komponente der Schraubung besitzen [anderenfalls wären sie nicht gleich, also nicht deckbar], so ist es unmöglich, das Rhomboëdersystem zur Ableitung eines Systems dieser Abtheilung zu benutzen, denn bei ihm besteht die eine Axenart aus Drehungsaxen $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, und beide andere aus Schraubenaxen

entgegengesetzten Windungssinnes $(B_{\frac{2\pi}{3}, \frac{\lambda}{3}}, C_{\frac{2\pi}{3}, -\frac{\lambda}{3}})$. Also

entspringen nur aus den 3 übrigen 3-zähligen Systemen von einer Axenrichtung neue Systeme.

1) und 2) *Das rechte, resp. linke, abwechselnde Dreipunktschraubensystem*¹⁾ (Taf. II. Fig. 23, 24), $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ be-

steht aus 2 ineinanderstehenden einfachen Schraubensystemen, so dass z. B. die Schraubenaxen B des einen Systems in den Axen C des anderen liegen und dort nach entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Fasst man also die Punkte des einen Theilsystems zu Dreipunktschrauben um die Axen B zusammen, die des anderen Theilsystems zu Schrauben um die Axen C , und schreitet man jetzt von Schraube zu Schraube fort, so gehören die aufeinander folgenden abwechselnd dem einen und dem anderen Theilsystem an. Andere Auffassung desselben Systems: Man fasse die Punkte des einen Theilsystems zu Dreipunktschrauben um die Axen A zusammen. Weil diese Axenart beim Umwenden mit sich selbst zur Deckung kommt, so entspringt aus jeder einfachen Schraube um A eine zusammengesetzte 3-punktschraube um A , so dass das System auch als ein zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem auffassbar ist. Es unterscheidet sich von dem früheren System dieses Namens dadurch, dass die gegenseitige Stellung der verschiedenen zusammengesetzten Schrauben hier eine andere ist. Dreht man nämlich, bei unveränderter Stellung der Axen, alle Schrauben um 30° um ihre Axen, so geht das vorliegende System in jenes frühere über. — Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit einem Punktgitter gleichseitig dreieckiger Maschen besetzt; die Figur ist die

1) früher: Zusammengesetztes dreizähliges Schraubensystem.

Projektion 6 solcher aufeinander folgender Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Deckschiebung λ und die Drehung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in e fallende Queraxe ziehn das Vorhandensein einer zweizähligen parallelen Drehaxe im Abstand $\frac{\lambda}{2}$ nach sich. Ferner folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und einer zu ihr unter 60° geneigten Deckschiebung e die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$ im Abstände $\frac{3}{4}a$. Also hat das Schnittpunktsnetz aller Queraxen von dieser Richtung rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{3}{4}a$, welche bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. — Ebenso beschaffen ist das Schnittpunktsnetz von untereinander parallelen Queraxen der anderen Gattung Q' . Eine Drehaxe Q und eine Q' , die nach einer um 60° abweichenden Richtung geht, treffen eine und dieselbe Hauptaxe in zwei um $\frac{\lambda}{6}$ entfernten Punkten.

3) *Das abwechselnde dreiseitige Säulensystem*¹⁾ (Taf. II. Fig. 25), $A_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, λ , e , $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ besteht aus zwei ineinander gestellten dreiseitigen Säulensystemen, so dass die Säulenmittellinien z. B. in den Axen B und C liegen. In anderer Auffassung besteht das System aus gewundenen dreiseitigen Säulen um die A als Mittellinien, und sein Unterschied vom zusammengesetzten dreiseitigen Säulensystem besteht nur darin, dass sämtliche Säulen hier um 30° um ihre Axen gedreht sind, verglichen mit ihrer dortigen Stellung. Jede Hauptebene ist im Allgemeinen mit den Eckpunkten paralleler kongruenter gleichseitiger Dreiecke besetzt. Die Figur ist die Projektion zweier benachbarter Hauptebenen und zugleich des ganzen Systems.

Die Schnittpunktsnetze der Queraxen stimmen mit denen des vorigen Systems überein; sie liegen aber anders gegeneinander, indem 2 Queraxen Q und Q' jetzt eine Hauptaxe in ein und demselben Punkt treffen.

Einige Specialfälle. Die Sechsecke der Projektionsfigur können sich auf gleichseitige Dreiecke reduciren, so gelegen, dass ihre Seiten parallel sind den Höhen derjenigen Dreiecksmaschen, die durch die Centra bestimmt werden. Wenn sich jedes Sechseck auf seinen Mittelpunkt zusammenzieht,

1) früher: Zusammengesetztes System der dreiseitigen Säule.

entstehen dieselben Systeme wie unter derselben Voraussetzung bei der vorigen Abtheilung (pag. 131). Wenn die Sechsecke regelmässige sind, so wenden die umgebenden Dreiecke einander die Seiten gerade zu; zwischen letzteren können dabei quadratische Zwischenräume bleiben; oder die Dreiecke können sich dabei auf Punkte reduciren, so dass die ganze Figur aus unmittelbar aneinander liegenden regelmässigen Sechsecken (Bienenzellen) besteht. Die einzelnen Punktpaare der Sechsecke können der Hauptebene parallel sein; auch kann die gewundene Säule in das Projektionssechseck selbst übergehn, u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

(Die Queraxe Q projecirt sich in e)

1) und 2) Rechtes, resp. linkes, abwechselndes 3-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{3}, \pm \frac{\lambda}{3}}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

3) Abwechselndes dreiseitiges Säulensystem.

$$A_{\frac{2\pi}{3}, 0}, \lambda, e, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}.$$

§ 21. Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Bei Systemen mit 2-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung giebt es nach § 9 (Satz 38—41) 4 verschiedene Hauptaxenarten, welche auf einer senkrechten Ebene ein parallelogrammatisches Schnittpunktsnetz bestimmen. Daher giebt es mehrere Möglichkeiten ein hergehöriges System durch Umwenden zu verdoppeln, je nachdem nämlich jede der 4 Axenarten, oder nur einige von ihnen, oder keine, mit sich selbst zur Deckung kommt. Indessen ist nicht bei jeder beliebigen Beschaffenheit des parallelogrammatischen Schnittpunktsnetzes eine derartige Umwendung ausführbar, dass die Axen in Linien fallen, die schon vorher von Axen besetzt waren, d. h. dass bei der Umwendung das Axenschnittpunktsnetz der Hauptebene mit sich zur Deckung gelange; *sondern dies ist nur dann möglich, wenn das Elementarparallelogramm ein Rechteck oder ein Rhombus ist.* Nun sind nur folgende 5 Fälle denkbar:

a) *Jede der 4 Axenarten kommt beim Umwenden mit sich selbst zur Deckung.* In diesem Falle muss es immer möglich sein, eine und dieselbe Axe umgewendet in sich selbst fallen zu lassen; das wird herbeigeführt durch zweizählige Drehung um eine, jene Axe senkrecht schneidende Queraxe. Damit hierbei zugleich jede der 3 anderen Axenarten mit sich zur Deckung komme, muss das Elementarparallelogramm ein *Rechteck* sein, und jene Queraxe muss in eine seiner Seiten fallen.

b) *Jede der 3 Axenarten kommt mit sich selbst zur Deckung, die vierte nicht.* Jetzt müsste also die vierte Axenart in Linien fallen, die bisher nicht mit Axen besetzt waren, und das ist unmöglich (Satz 38, Zusatz).

c) *Jede von 2 Axenarten kommt mit sich selbst zur Deckung, die beiden anderen tauschen sich aus.* Hier muss es immer möglich sein, eine Axe umgewendet in sich selbst fallen zu lassen; dies wird erreicht durch zweizählige Drehung um eine, jene Axe senkrecht schneidende Queraxe. Damit hierbei zugleich noch eine der anderen Axenarten mit sich selbst zur Deckung komme, und die übrigen beiden Axenarten sich austauschen, muss das Elementarparallelogramm ein *Rhombus* sein, und jene Queraxe muss in eine Diagonale desselben fallen.

d) *Nur eine Axenart kommt mit sich zur Deckung.* Dass hierbei von den 3 anderen zwei sich austauschen, während die vierte in bisher unbesetzte Gerade fällt, ist unmöglich. Ebenso unmöglich ist es, dass die 3 anderen Axenarten sich cyklisch austauschen, weil sonst wie in § 19 (Seite 127) folgen würde, dass alle 3 untereinander gleich sind, was nach Satz 41 unmöglich. Also ist dieser Fall überhaupt ausgeschlossen.

e) *Keine Axenart kommt mit sich zur Deckung.* Die Axen können weder in bisher unbesetzte grade Linien einrücken (Satz 38, Zusatz), noch können sie sich cyklisch vertauschen, sonst müssten sie untereinander gleich sein, was nach Satz 41 unmöglich ist. Also dürfen sich die 4 Axenarten nur paarweise austauschen. Nun sei das erste Paar von sich austauschenden Axen z. B. *A, C*, das andere Paar *B, D*. Dann müssen sich in der Projektionsfigur 19 (Seite 73) die Linien *L* und *M* austauschen; dies geschieht durch zwei-

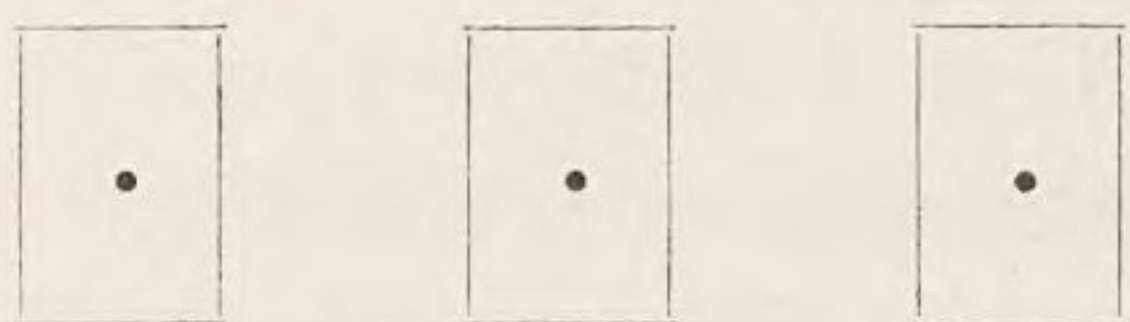
zählige *Drehung* oder *Schraubung* um eine zu beiden parallele, mitten zwischen ihnen verlaufende Queraxe. Soll 1) *durch Drehung* die Austauschung beider Paare bewirkt werden, so kann das Elementarparallelogramm nur ein *Rechteck* sein, dessen *ein* paralleles Seitenpaar in L und M liegt. Jetzt gehn die sich austauschenden Axenarten durch 2 Nachbarecken des Elementarparallelogramms; die Queraxe steht in der Mitte dieser Rechtecksseite auf ihr senkrecht. — Soll 2) *durch Schraubung* die Austauschung beider Paare erfolgen, so kann das Elementarparallelogramm kein Rhombus sein, weil hierbei statt paarweiser Austauschung cyklische Vertauschung eintreten würde; es muss vielmehr ein *Rechteck* sein, um dessen eine Mittellinie (z. B. $\parallel e'$) die Schraubung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$ auszuführen ist, damit die Austauschung eintrete.

Hierbei stehn die sich austauschenden Axenarten diagonal gegenüber.

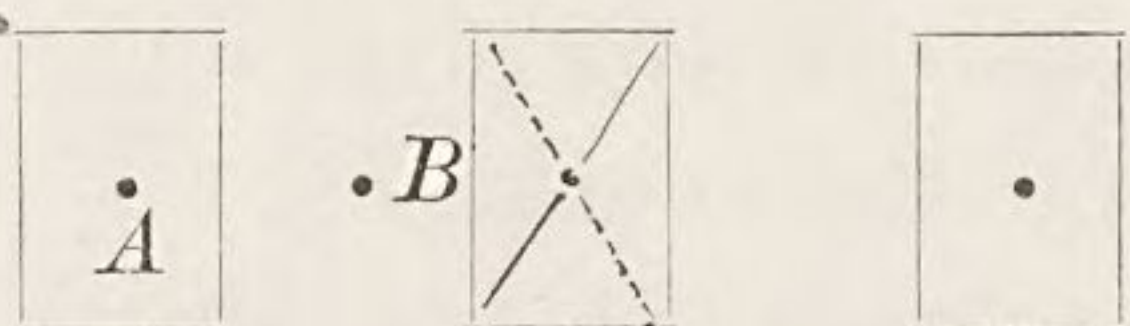
Es giebt nach Obigem 4 Abtheilungen hergehöriger Punktsysteme, entsprechend den Fällen a), c), e1) und e2), welche als $\alpha)$, $\beta)$, $\gamma)$, $\delta)$ unterschieden werden sollen. In jedem dieser Fälle existiren nach Satz 24 zweizählige Axen nach 3 Paaren von entgegengesetzten Richtungen, deren jedes auf den beiden anderen senkrecht steht; und jede Schaar von Axen, die in parallelen Linien verlaufen, muss nach Satz 38 und 41 aus 4 Axenarten bestehn (sowie die erste aus A , B , C , D), die jedesmal auf einer senkrecht schneidenden Ebene ein parallelogrammatisches Schnittpunktsnetz bestimmen. Die Bezeichnung „Hauptaxe“ hat hier, wo nur gleichvielzählige Axen vorkommen, ihre eigentliche Bedeutung verloren; sie wird aber, mit Rücksicht auf die Ableitung der Systeme aus solchen mit 2-zähligen Axen von nur einer Richtung, und der kurzen Ausdrucksweise halber, beibehalten.

$\alpha)$ Jede Axenart kommt mit sich selbst zur Deckung. Das Elementarparallelogramm ist rechteckig. Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme besteht nach Satz 48 aus den Ecken von lauter kongruenten parallelen halbregelmässigen Vierecken (d. h. Rechtecken), deren Centra in der einen Axenart (z. B. A) liegen, also selbst ein rechteckiges Netz bilden, und deren Seiten parallel laufen den Seiten der durch die 4 Axenarten bestimmten Maschen (Fig. 42).

Die einzelnen Systeme dieser Abtheilung entstehen aus



C. D.



zweizähligen Systemen mit nur einer Axenrichtung durch zweizählige Drehung um eine Queraxe Q , die in eine Seite (z. B. a') des Elementarrechtecks fällt, sonst aber beliebig liegt. Die Queraxen zweiter Art, Q' , projectiren sich in die anderen Seiten (a'') der Elementarrechtecke.

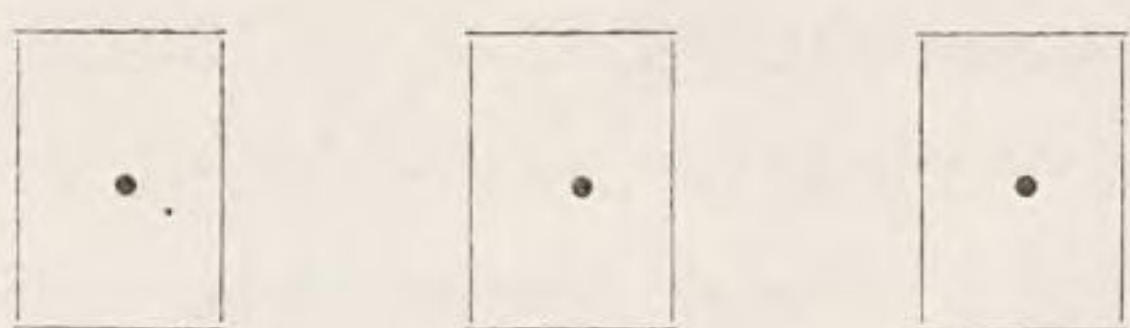


Fig. 42.

1) Das System der rechteckigen Säule¹⁾ $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, λ , $(D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', e'')$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ (Taf. I. Fig. 5)

entspringt aus dem zweizähligen Säulensystem. Je 2 Punktpaare, angehörend dem einen und dem anderen Theilsystem, stehn zunächst übereinander und bestimmen ein *gleichflächiges Tetraëder*, das sich in ein Rechteck der Figur projectirt. Das ganze System besteht aus solchen kongruenten parallelen Tetraëdern, deren Centra ein rechtwinklig parallelepipedisches Raumgitter bilden. Die Projektion zweier Nachbarhauptebenen ist gleich der Projektion des ganzen Systems.

Die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, verknüpft mit der Deckschiebung λ ,

fordert die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstand $\frac{\lambda}{2}$; aber verknüpft mit der Deckschiebung e'' , fordert sie die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstände $\frac{e''}{2} = a''$. Also besitzt das Schnittpunkts-

netz der Queraxen Q rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e''}{2}$, bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Die zu den vorigen senkrecht verlaufenden Queraxen Q' sind Drehaxen und haben ebenfalls ein rechteckiges Schnittpunktsnetz mit den Maschenseiten $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{e'}{2}$. Zwei Axen Q und Q' treffen eine Hauptaxe in demselben Punkt (nämlich im Mittelpunkt eines gleichflächigen Tetraëders, oder mitten zwischen 2 solchen). Die Gesamtheit aller Axen des Systems bildet also ein recht-

1) früher: Tetraëderschichtensystem mit rechtwinklig parallelepipedischer Masche.

winklig parallelepipedisches Axennetz mit den Parallelepipedkanten
 $\frac{\lambda}{2}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$.

2) *Das zusammengesetzte rechteckige 2-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. I. Fig. 6) $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, \left(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e''\right), Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entspringt aus dem 2-punktschraubensystem; es besteht aus zusammengesetzten 2-punktschrauben, deren Axen mit der einen Art zweizähliger Axen (z. B. den A) zusammenfallen, also ein rechteckiges Netz bestimmen. Die Konstruktionsaxe Q halbirt den Abstand eines Punktpaars, wie dergleichen statt der einzelnen Punkte des einfachen Schraubensystems eintreten.

Die Queraxen Q und Q' sind sämtlich Drehaxen; die von ihnen gebildeten Schnittpunktsnetze sind gleich denen des vorigen Systems, weil die Deckschiebungen e', e'', λ und die Lage der Querdrehaxe Q mit den dortigen übereinstimmen; aber beide Netze liegen hier anders gegeneinander wie dort, indem eine Hauptaxe in zwei um $\frac{\lambda}{4}$ auseinander liegenden Punkten von einer Q und einer Q' getroffen wird.

3) *Das System der Rhombensäule erster Art*²⁾ (Taf. I. Fig. 7) $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, B_{\frac{2\pi}{2}, 0}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, \left(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', \sigma''\right), Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, entspringt aus dem Specialfall α) des Systems der klinorhombischen Säule (pag. 103), bei welchem die Mittelpunkte der Punktpaare das Raumgitter der geraden Rhombensäule bilden. Durch die Verdoppelung des Systems treten statt jedes Punktpaars 2 solche auf, die zusammen ein gleichflächiges Tetraëder bestimmen. Das System besteht also aus lauter parallelen kongruenten gleichflächigen Tetraëdern, deren Centra das Raumgitter der geraden Rhombensäule bilden. (Die Axe dieser geraden Säule verläuft in der Figur horizontal von links nach rechts.)

Die Queraxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, welche mit e' und folglich mit dieser Säulenaxe parallel läuft, und die Deckschiebung λ , fordern zusammen die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstände $\frac{\lambda}{2}$. Die erstere Queraxe und die auf ihr senkrechte Deckschiebung $2e''$ fordern zusammen

1) früher: Stufenschichtensystem.

2) früher: Tetraëderschichtensystem mit rhombischer Säulenmasche.

die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstand e'' ; so dass lauter solche Axen für sich ein rechteckiges Schnittpunktsnetz bilden. Es giebt aber noch mehr gleichgerichtete Axen. Nämlich aus der anfänglichen Queraxe Q und der zu ihr senkrechten Deckschiebung σ'' folgt die Existenz einer parallelen Drehaxe, gerichtet durch den Mittelpunkt einer rechteckigen Masche jenes Schnittpunktsnetzes. Das gesammte Schnittpunktsnetz der $\parallel e'$ verlaufenden Queraxen Q hat also rhombische Maschen mit den Diagonalen $\frac{\lambda}{2}$ und e'' , bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. — Senkrecht zu diesen Queraxen verlaufen andere, Q' . Eine solche, verbunden mit den Deckschiebungen λ und e' führt auf parallele Drehaxen in den Abständen $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e'}{2}$. Ferner fordert $Q'_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, verbunden mit σ'' , die Existenz einer parallelen

Schraubenaxe $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e''}$, um $\frac{\lambda}{4}$ von der Anfangsaxe Q' entfernt. Hier

hat also das Schnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{4}$ und $\frac{e'}{2}$, bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Eine Hauptaxe wird von 2 aufeinander senkrechten Querdrehaxen Q und Q' in ein und demselben Punkt geschnitten.

4) *Das Rhombenoktaedersystem*¹⁾ (Taf. I. Fig. 8) $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, λ , $(D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'', e''')$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entspringt aus dem Specialfall β) des Systems der klinorhombischen Säule (pag. 103). Auch hier treten statt jedes Punktpaars 2 solche ein, die zusammen ein gleichflächiges Tetraëder bilden. Daher besteht das System aus lauter kongruenten, parallelen gleichflächigen Tetraëdern, deren Centra ein Raumgitter mit centrirten rhombischen Säulen bilden; d. h. das System ist ansehbar als gebildet aus 2 kongruenten Systemen der vorigen Art, die parallel mitten ineinander gestellt sind, so dass die Tetraëdercentra des einen Theilsystems in die Mitten der rhombischen Säulenmaschen, die durch die Centra des anderen Theilsystems gebildet sind, hineinfallen. Die Centra von 6 benachbarten Tetraëdern bilden die Ecken eines *Rhombenoktaëders*.

Die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ um eine in e' fallende Axe, verbunden

1) früher: Zusammengesetztes Tetraëderschichtensystem mit rhombischer Säulenmasche.

mit der Deckschiebung σ' , fordert eine parallele Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, e'}$

im Abstände $\frac{\lambda}{4}$. $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und e''' fordern zusammen eine parallele

Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, e'}$, von der Anfangsaxe um $\frac{e''}{2}$ entfernt (in der Rich-

tung von e''). $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und σ'' fordern zusammen eine parallele Dreh-

axe $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, so gelegen, dass sie im Schnittpunktsnetz die vierte Ecke

einer rechteckigen Masche bestimmt, deren 3 andere Ecken durch die

vorigen 3 Queraxen bestimmt werden. Die rechteckigen Maschen

dieses Schnittpunktsnetzes haben also die Seiten $\frac{\lambda}{4}$ und $\frac{e''}{2}$ ($= a''$),

resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Die Hälfte aller Axen

dieser Richtung besteht aus Drehaxen, die andere Hälfte aus Schrau-

benaxen. Ebenso findet man als

Schnittpunktsnetz der auf diesen

Queraxen senkrechten Queraxen

Q' ein Netz rechteckiger Ma-

schen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und

$\frac{e'}{2}$ ($= a'$), resp. parallel und

senkrecht zur Hauptaxe. Auch

hier ist die Hälfte aller Axen

Drehaxen, die andere Hälfte

Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e'}$. Bedenkt

man nun, dass eine Hauptdreh-

axe von 2 aufeinander senk-

rechten Querdrehaxen Q und Q'

in ein und demselben Punkte

geschnitten wird (welcher ent-

weder das Centrum eines gleichflächigen Tetraëders ist, oder mitten

zwischen 2 solchen Nachbarcentren liegt), und dass auch die Haupt-

axen zu gleichen Theilen Dreh- und Schrau-

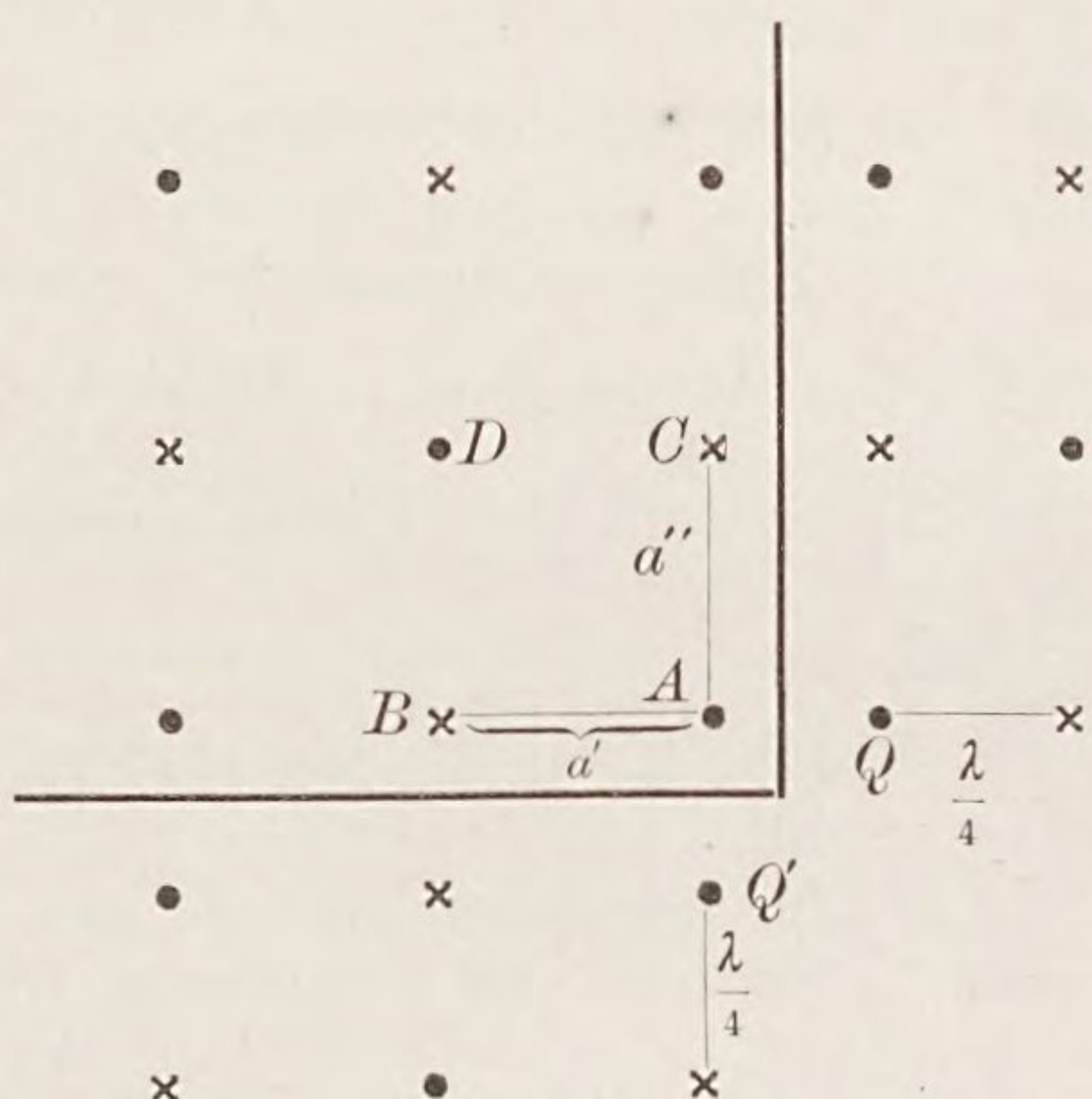


Fig. 43.

weder das Centrum eines gleichflächigen Tetraëders ist, oder mitten

zwischen 2 solchen Nachbarcentren liegt), und dass auch die Haupt-

axen zu gleichen Theilen Dreh- und Schrau-

benaxen sind, so folgt: Die Gesammtheit

aller Axen des Systems bildet ein recht-

winklig parallelepipedisches Axennetz mit

den Parallelepipedkanten $\frac{\lambda}{4}$, $\frac{e'}{2}$, $\frac{e''}{2}$; in 2

diametral gegenüberliegenden Parallelepi-

pedecken stoßen je 3 Drehaxen (d) zusam-

men; die anderen 6 Parallelepipedkanten

sind Schraubenaxen (s) (Fig. 43 und 44).

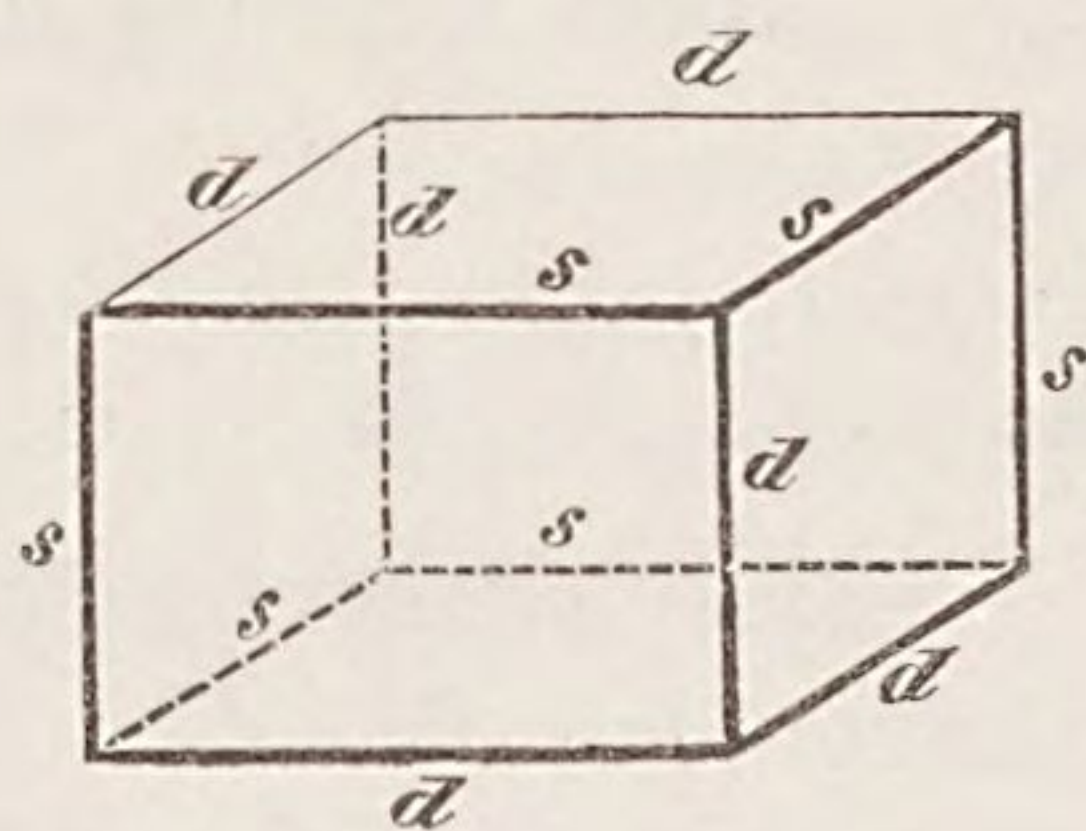


Fig. 44.

Einige Specialfälle: Die Rechtecke der Projektionsfigur können sich auf Zweiecke (d. h. grade Linien) reduciren, parallel der einen Seitenart der Elementarparallelogramme. Ferner kann sich jedes Rechteck auf seinen Mittelpunkt reduciren; diese Figur entsteht z. B., wenn das gleichflächige Tetraëder auf ein Punktpaar oder nur auf den Mittelpunkt zusammengezogen ist; jetzt ist das System in ein rechtwinklig parallelepipedisches, oder rhombisch-säulenförmiges oder rhombenoktaëdrisches Raumgitter übergegangen. Sodann können die Rechtecke in Quadrate übergehn. Auch können die einzelnen Punktpaare den Hauptebenen parallel sein; und die gleichflächigen Tetraëder können in die Rechtecke der Projektionsfigur selbst übergehn.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

- 1) System der rechteckigen Säule. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
- 2) Zusammengesetztes rechteckiges 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
- 3) System der Rhombensäule erster Art. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, e', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.
- 4) Rhombenoktaëdersystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

In den Symbolen sind e' und e'' aufeinander und auf λ senkrecht; σ ist eine Deckschiebung, deren zur Axe A parallele und senkrechte Komponente resp. $= \frac{\lambda}{2}$ und $= e$ ist. Die Queraxe Q fällt in e' .

§ 22. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

β) Jede von 2 Axenarten kommt mit sich selbst zur Deckung, die beiden anderen tauschen sich aus.

Das Elementarparallelogramm ist ein Rhombus mit den Diagonalen δ', δ'' . Die Projektionsfigur aller hergehörigen Systeme lässt sich nach Satz 50 entweder als aus kongruenten parallelen Rechtecken bestehend ansehen, deren Centra ein rhom-

bisches Netz bilden, oder sie ist ansehbar als gebildet aus 2 symmetrisch ineinander stehenden Gruppen kongruenter grader Linien (Zweiecke) (Fig. 45). Indem zur Ableitung dieser Systeme aus denjenigen mit 2-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung die Drehung um eine Queraxe dient, welche in eine Diagonale des rhombischen Elementarparallelogramms fällt (im Uebrigen aber beliebig liegt), so liegen die Centra aller Rechtecke in der einen Hauptaxenart (z. B. A), und ihre Seiten sind parallel den Rhombendiagonalen. Fasst man aber alle Punkte zu Paaren zusammen, so liegen die Mittelpunkte der Paare erster Stellung in der einen Hauptaxenart (z. B. B), die der Paare zweiter Stellung in der anderen (C), so dass alle Mittelpunkte zusammen ein rechteckiges Netz bestimmen.

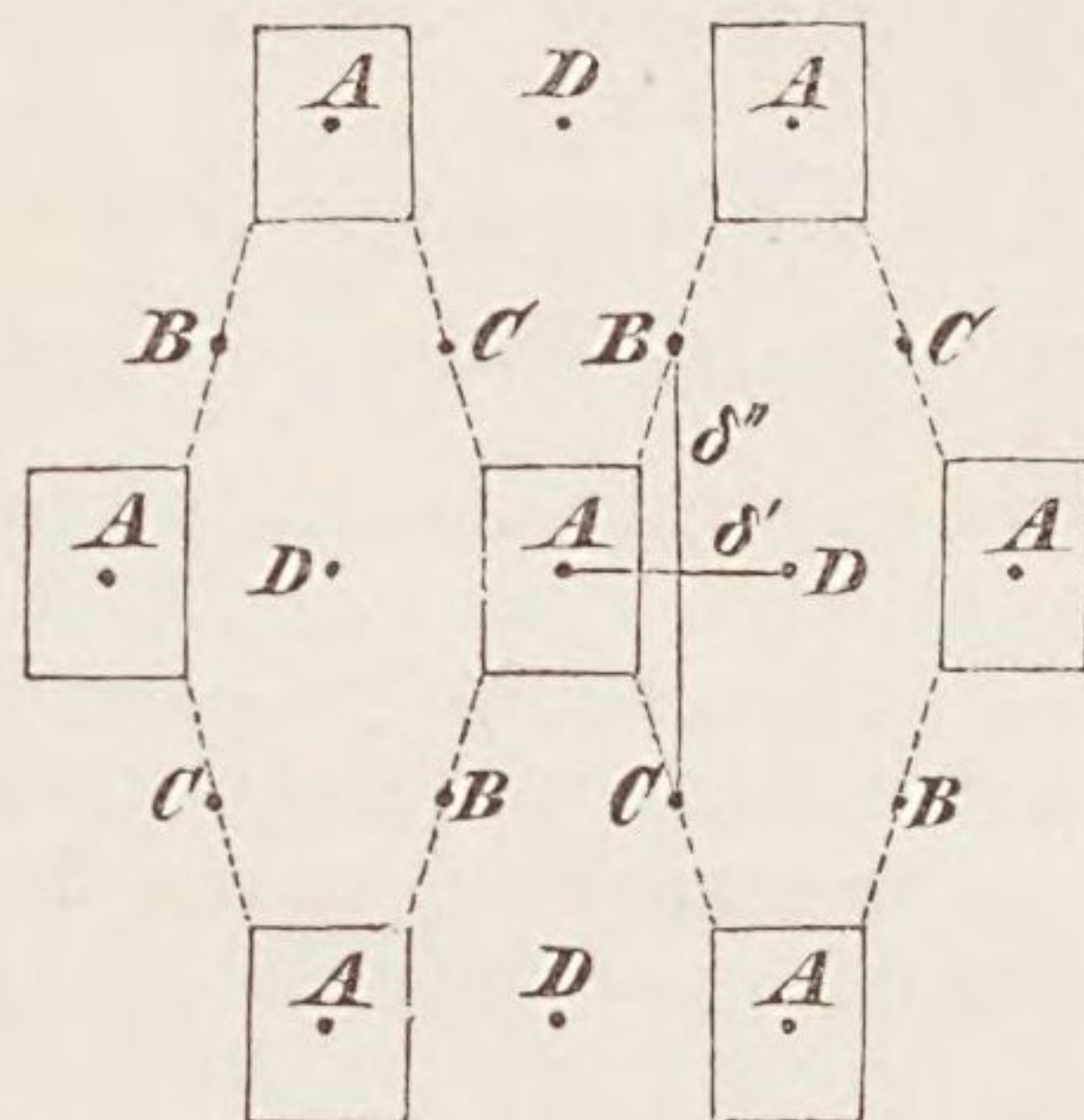


Fig. 45.

Aus dem zweizähligen Säulensystem entspringt das schon vorher unter α , 3 abgeleitete System der Rhombensäule erster Art. Nämlich durch Drehung um die Queraxe geht aus einer mit parallelen Punktpaaren besetzten Hauptebene ein Hauptebenenpaar hervor, gleichflächige Tetraëder zwischen sich fassend, deren Centra ein rhombisches Gitter bilden. Die Fig. 45 ist also die Projektion dieses Systems auf eine Ebene senkrecht zur Axe der Rhombensäule.

1) Das zusammengesetzte rhombische 2-punktschraubensystem¹⁾ (Taf. I. Fig. 9) $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, (D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'' = e'), Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entspringt aus dem 2-punktschraubensystem; es besteht aus zusammengesetzten 2-punktschrauben, deren Axen mit der einen Art zweizähliger Axen (z. B. A) zusammenfallen, also ein rhombisches Netz bestimmen. Die Konstruktionsaxe Q halbirt den Abstand eines Punktpaares, wie dergleichen statt der einzelnen Punkte des einfachen Systems eintreten.

Die in die Rhombendiagonale δ' ($= AD$) fallende Drehaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$

1) früher: Zusammengesetztes Wechselschichtensystem.

und die Deckschiebung λ fordern die Existenz einer parallelen Drehaxe im Abstände $\frac{\lambda}{2}$. Und $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ nebst der Deckschiebung e' fordern

eine parallele Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \delta'}$ im Abstände $\frac{\delta''}{2}$, gemessen senkrecht zur Hauptaxe. Also hat das Schnittpunktsnetz dieser Queraxen

Q rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{\delta''}{2}$, bezüglich parallel

und senkrecht zur Hauptaxe; die Hälfte der Queraxen, nämlich alle diejenigen, welche die Hauptaxen A und D schneiden, sind Drehaxen, die andere Hälfte, nämlich die, welche die Axen B und C schneiden, sind Schraubenaxen. — Die auf diesen Queraxen senkrechte Schaar von Queraxen Q' ist von der eben geschilderten nicht wesentlich verschieden; nur haben die rechteckigen Maschen des Schnittpunktsnetzes bezüglich die Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{\delta'}{2}$, und die Schraubenaxen sind $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \delta''}$.

Zwei nächste Queraxen der einen und anderen Schaar, Q und Q' , treffen eine Hauptaxe in Punkten, die um $\frac{\lambda}{4}$ voneinander abstehn.

Damit aus dem System der klinorhombischen Säule ein System der vorliegenden Abtheilung entspringe, muss sein Elementarparallelogramm ein Rhombus sein, und es müssen die 4 Axenarten so angeordnet sein, dass je 2 Drehaxen sich diagonal gegenüberliegen, und ebenso je 2 Schraubenaxen; denn sonst würden sich bei der Umdrehung um eine Queraxe eine Dreh- und eine Schraubenaxe austauschen sollen, was ihrer Ungleichheit wegen unmöglich ist. Das System der klinorhombischen Säule muss also in der Specialisirung γ) zu Grunde gelegt werden, wo die Mittelpunkte der zur Hauptebene parallelen Punktpaare nach *Oblongoktaëdern* angeordnet sind (pag. 103). Hier sind aber noch 2 Fälle zu unterscheiden: nämlich entweder fallen die beiden Drehaxenarten je in sich selbst, während die beiden Schraubenaxenarten sich austauschen; oder umgekehrt. So entstehn also die folgenden beiden neuen Systeme.

2) *Das System des Oblongoktaëders*¹⁾ (Taf. I. Fig. 10) $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, (D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'' = \sigma', e''' = 2\delta'), Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entsteht aus dem System der klinorhombischen Säule (Spe-

1) früher: Zusammengesetztes Tetraëderschichtensystem mit rechtwinklig parallelepipedischer Masche.

cialisirung γ) durch Umdrehung um eine Queraxe, welche 2 benachbarte Drehaxen (z. B. A und D) schneidet. Dadurch treten statt jedes Punktpaares 2 Paare ein, welche die Ecken eines gleichflächigen Tetraëders bilden. Also besteht das System aus lauter kongruenten parallelen gleichflächigen Tetraëdern, die so angeordnet sind, als seien 2 kongruente Systeme der rechteckigen Säule (pag. 138) parallel mitten ineinander gestellt, so dass die Centra der Tetraëder des einen Theilsystems in die Mitten der rechtwinklig parallelepipedischen Maschen des anderen fallen. Daher bilden die Centra von 6 benachbarten Tetraëdern die Ecken eines *Oblongoktaëders*.

Aus der in eine Rhombendiagonale δ' fallenden Querdrehaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und den Deckschiebungen λ und $2\delta''$ folgt die Existenz von 2

parallelen Drehaxen in den Abständen $\frac{\lambda}{2}$ und δ'' , gemessen parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Dass durch den Mittelpunkt desjenigen Rechtecks, welches im Queraxenschnittpunktsnetz durch diese 3 Axen bestimmt wird, eine ihnen parallele Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \delta'}$ verlaufen

muss, folgt aus $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ und σ' . Das vollständige Schnittpunktsnetz der

Q hat also rhombische Maschen, deren Diagonalen $\frac{\lambda}{2}$ und δ'' resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. — Nicht wesentlich verschieden von dieser Queraxenschaar ist die auf ihr senkrechte Schaar der Q' , nur dass die zur Hauptaxe senkrechte Diagonale der Rhombenmaschen hier $= \delta'$ ist, und dass die Schraubenaxen das Symbol $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \delta''}$ haben. 2 Querdrehaxen Q und Q' treffen eine Hauptdrehaxe

in demselben Punkt. — Folglich bilden sämtliche Drehaxen (die Haupt- und Queraxen) für sich ein rechtwinklig parallelepipedisches Netz, dessen Maschen die Kanten $\frac{\lambda}{2}$, δ' , δ'' haben. Und sämtliche Schraubenaxen bilden ein diesem Netze kongruentes Netz, dessen Knotenpunkte aber in den Mitten der Parallelepipedmaschen des vorigen liegen.

3) *Das rhombische Gegenschraubensystem*¹⁾ (Taf. I. Fig. 11) $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}$, $B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$, λ , $(D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'' = \sigma', e''' = 2\delta')$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entsteht aus dem System der klinorhombischen Säule (Spe-

1) früher: Zusammengesetztes Stufenschichtensystem erster Art.

cialisirung γ) durch Umdrehung um eine Queraxe, welche 2 benachbarte Schraubenaxen (z. B. B und C) schneidet, so dass diese beiden Axenarten je in sich selbst fallen, während die beiden Drehaxenarten A und D sich austauschen. Die mit parallelen Punktpaaren besetzten Hauptebenen des Ausgangssystems kommen durch die Umdrehung in solche Lage, dass die neuen Punktpaare sich symmetrisch zwischen die vorigen projiciren. 4 aufeinanderfolgende Hauptebenen geben dieselbe Projektion wie das ganze System. In anschaulicherer Weise fasst man das System als aus 2 zusammengesetzten rechteckigen 2-punktschraubensystemen ($\alpha, 2$, pag. 139) bestehend auf, die parallel so ineinander stehen, dass die Axen der Schrauben des einen Theilsystems in den Mittellinien derjenigen Rektangulärsäulen verlaufen, die durch die Axen der Schrauben des anderen Theilsystems gebildet werden, dass aber das eine Theilsystem gegen das andere um $\frac{\lambda}{2}$ längs der Hauptaxe verschoben ist. 4 aufeinander folgende Punkte eines Cylindermantels um B bilden eine *Art unregelmässiger 4-punktschraube*; ebenso um C ; doch ist die letztere entgegengesetzt gewunden wie erstere (ähnlich wie beim vierzähligen Gegenschraubensystem).

Das Schnittpunktsnetz der Queraxen Q stimmt mit demjenigen beim vorigen System überein; ebenso dasjenige der Q' . Zwei nach 2 senkrechten Richtungen verlaufende Querdrehaxen Q und Q' treffen eine Schraubenhauptaxe in 2 um $\frac{\lambda}{4}$ entfernten Punkten; und ebenso 2 Querschraubenaxen eine Drehhauptaxe. — Die 3 aufeinander senkrechten

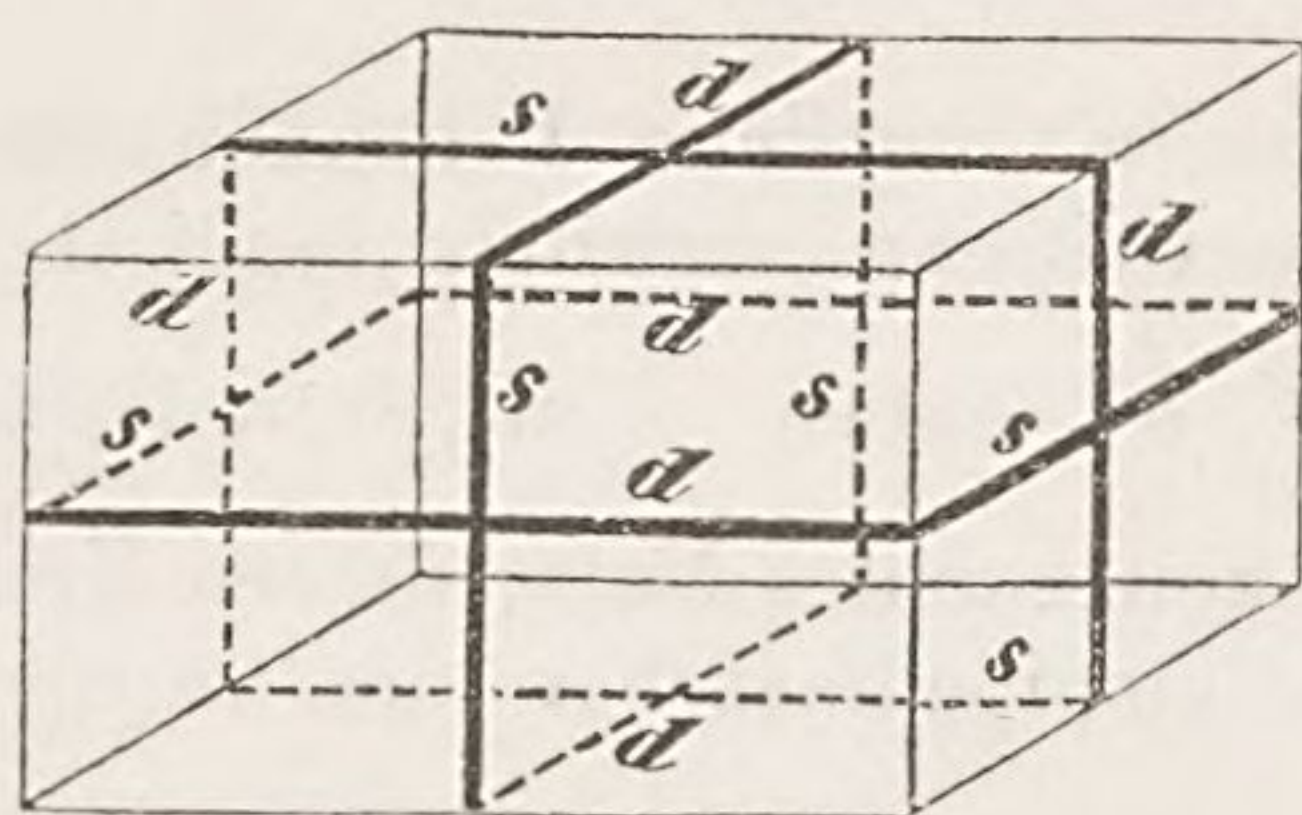


Fig. 46.

Schaaren von Drehaxen schneiden sich nicht, sondern gehn mitten zwischen einander hindurch; ebenso die 3 Schaaren von Schraubenaxen; aber jede Drehaxe wird abwechselnd von aufeinander senkrechten Schraubenaxen getroffen, und jede Schraubenaxe von solchen Drehaxen. Die gegenseitige Lage lässt sich am besten so schildern: Zieht man auf jeder der 6 Seiten-

flächen eines rechtwinkligen Parallelepipeds (mit den Kanten $\frac{\lambda}{2}$, δ' , δ'') die Verbindungslinien der Mitten von je 2 parallelen Kanten, so geben diese Mittellinien die Lage der Axen an. Von 2 sich schneidenden Axen ist allemal die eine eine Drehungs-, die andere eine Schraubenaxe (Fig. 46).

Einige Specialfälle. Die Rechtecke der Projektionsfigur können sich auf Zweiecke reduciren, parallel einer Diagonalenart der Elementarrhomben. Oder jedes Rechteck reducirt sich auf seinen Mittelpunkt; so ist's z. B. wenn jedes gleichflächige Tetraëder auf ein Punktpaar oder auf seinen Mittelpunkt sich zusammenzieht: jetzt ist das System ein rechtwinklig parallelepipedisches centrirtes, d. h. also ein oblong-oktaëdrisches, Raumgitter. Ferner können die Rechtecke Quadrate werden; die einzelnen, durch $Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$ entstehenden Punktpaare können der Hauptebene parallel sein; u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Zusammengesetztes rhombisches 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

2) System des Oblongoktaëders. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

[Q schneidet 2 Drehaxen A und D .]

3) Rhombisches Gegenschraubensystem.

Deckbewegungen wie bei 2); aber Q schneidet 2 Schraubenaxen B und C .

In diesen Symbolen ist e' die zu λ senkrechte Deckschiebung längs einer Rhombenseite; σ' eine Deckschiebung, deren zur Axe A parallele, resp. senkrechte Komponente $= \frac{\lambda}{2}$ resp. $= e'$ ist. Die Queraxe Q fällt in eine Rhombendiagonale δ' oder δ'' .

§ 23. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

γ) Die 4 Axenarten tauschen sich paarweise aus, so dass immer 2 benachbarte ineinander fallen.

Das Elementarparallelogramm ist rechteckig. Zur Ableitung der hergehörigen Systeme aus denjenigen mit zwei-zähligen Hauptaxen von nur einer Richtung dient die Drehung um eine Queraxe, welche mitten zwischen 2 Gegenseiten eines Elementarrechtecks verläuft; sie sei z. B. $\parallel e'$. Die Projektionsfigur aller Systeme dieser Abtheilung besteht nach Satz 49 aus 2 Schaaren von parallelen gleichen Punktpaaren, welche symmetrisch gegeneinander stehn. Die Mittelpunkte der

einen und der anderen Art von Punktpaaren liegen in 2 Axenarten, z. B. A und C , und bilden daher zusammen ein rechteckiges Netz (Fig. 47).

Aus dem 2-zähligen Säulensystem entspringt das schon

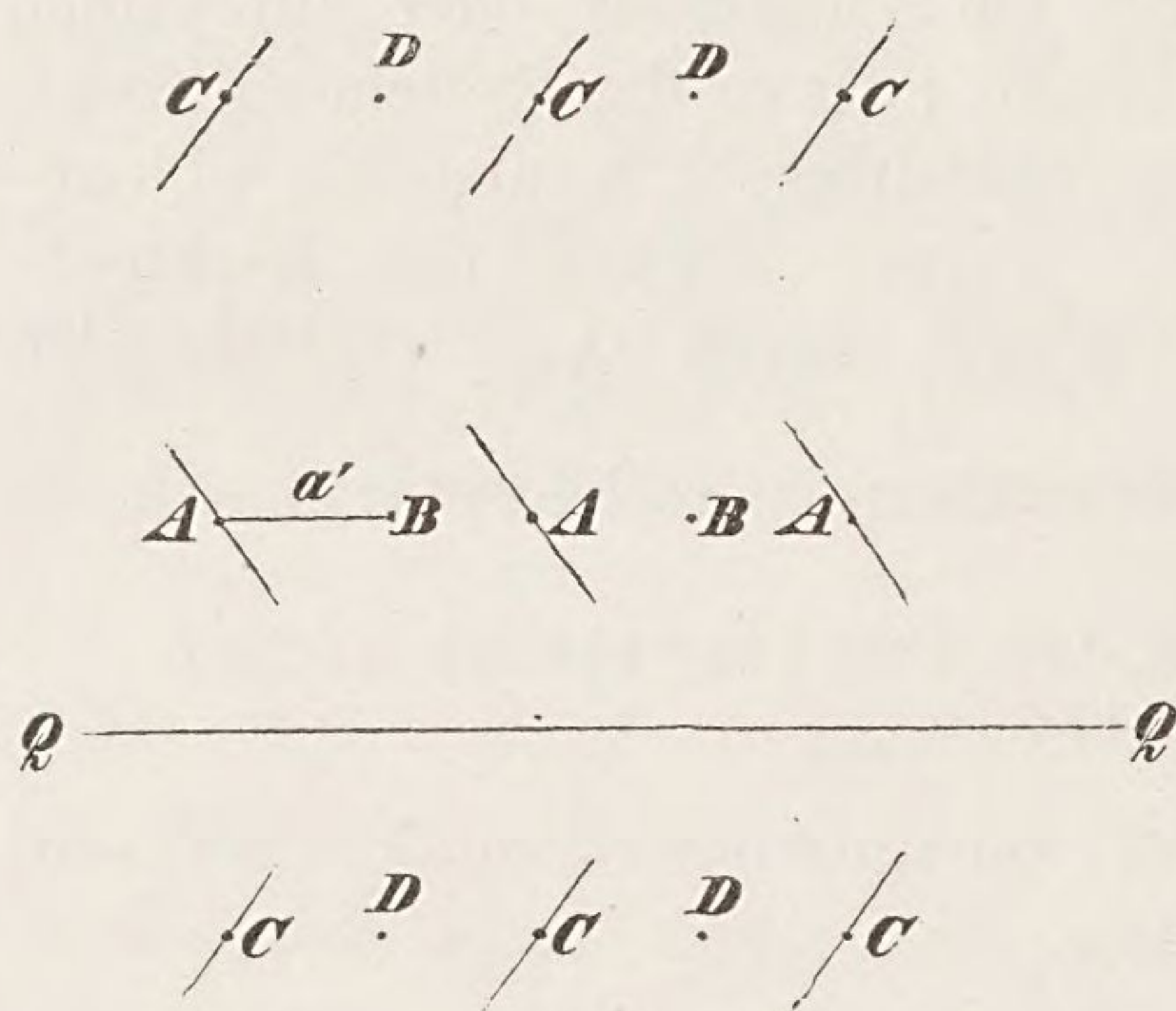


Fig. 47.

vorher unter α , 2 abgeleitete zusammengesetzte rechteckige 2-punktschraubensystem. Nämlich durch Drehung um Q geht aus einer mit parallelen Punktpaaren besetzten Hauptebene ein Hauptebenenpaar hervor, welches mit parallelen zusammengesetzten 2-punktschrauben erfüllt ist, deren Axen senkrecht

zu Q verlaufen. Die Figur ist also die Projektion dieses Systems auf eine Ebene parallel den Schraubenaxen. — Aus dem 2-punktschraubensystem entspringt:

1) Das abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensystem erster Art¹⁾ (Taf. I. Fig. 12) $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda,$

$(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e''), Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$. Es stehn 2 Gruppen von 2-punkt-

schrauben mitten so ineinander, wie sie aus völlig symmetrischer (spiegelbildlicher) Stellung durch beliebige Schiebung längs der Schraubenaxe zu liegen kommen.

Diejenige Queraxenschaar, zu der die Konstruktionsaxe Q gehört, besteht nur aus Drehaxen; ihr Schnittpunktsnetz hat rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}, \frac{e''}{2}$ bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe (dies folgt wie beim System α , 1). Alle diese Axen verlaufen also mitten zwischen den Hauptaxen. Die andere Queraxenschaar Q' besteht nur aus Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$; ihr Schnittpunktsnetz hat recht-

eckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}, \frac{e'}{2}$, parallel und senkrecht zur Hauptaxe (wie bei α , 1). Diese Axen schneiden nur die Hauptaxen,

1) früher: Wechselschichtensystem.

gehn aber zwischen den vorigen Queraxen mitten hindurch, also um $\frac{\lambda}{4}$ von ihnen entfernt.

2) Um aus dem System der klinorhombischen Säule ein neues abzuleiten, kann man es nur in der Specialisirung α) (grade Rhombensäule) zu Grunde legen, wo sein Elementarparallelogramm rechteckig ist und beide Drehaxen durch 2 Nachbarecken (z. B. A und C) hindurchgehn; denn sonst würden sich bei der Umdrehung um die in der Mittellinie des Rechtecks verlaufende Queraxe eine Dreh- und eine Schraubenaxe austauschen sollen, was unmöglich. So entsteht

das System der Rhombensäule zweiter Art¹⁾ (Taf. II. Fig. 13) $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $B_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$, $C_{\frac{2\pi}{2},0}$, λ , $(D_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, \sigma', e'')$, $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$. Hier liegen die beiden Theilsysteme der geraden Rhombensäule so ineinander, wie sie aus völlig symmetrischer Stellung durch beliebige Schiebung längs einer (zur Zeichnungsebene senkrechten) Axe zu liegen kommen. Die Säulenaxen verlaufen horizontal von links nach rechts.

Aus der $\parallel e'$ verlaufenden $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und σ' folgt die Existenz einer parallelen Schraubenaxe $Q_{\frac{2\pi}{2},e'}$, um $\frac{\lambda}{4}$ von der ersteren entfernt im Sinne der Hauptaxen. Aus $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$ und e'' folgt eine parallele Drehaxe im Abstände $\frac{e''}{2}$. Also hat dieses Queraxenschnittpunktsnetz rechteckige Maschen mit den Seiten $\frac{\lambda}{4}$ und $\frac{e''}{2}$, bezüglich parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Alle diese Queraxen verlaufen mitten zwischen den Hauptaxen. Senkrecht gerichtet zu diesen Queraxen sind die anderen, Q' , welche sämtlich Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2},\frac{e''}{2}}$ sind. Aus einer solchen,

verbunden mit λ , folgt eine parallele im Abstände $\frac{\lambda}{2}$; dagegen verbunden mit $2e'$, folgt eine parallele im Abstände e' . Hierdurch sind rechteckige Maschen des Schnittpunktsnetzes bedingt. Aber $Q'_{\frac{2\pi}{2},\frac{e''}{2}}$ verbunden mit σ' liefert eine parallele Axe, gerichtet durch die Mitte

1) früher: Zusammengesetztes Stufenschichtensystem zweiter Art.

der rechteckigen Masche. Somit hat das Schnittpunktsnetz der Q' rhombische Maschen mit den Diagonalen $\frac{\lambda}{2}$ und e' , resp. parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Eine Q' , welche eine Hauptaxe A schneidet, trifft, im Abstände $\frac{a''}{2}$ von diesem Schnittpunkt, eine Drehaxe der anderen Queraxenschaar. Somit treffen alle Q' sowohl die Hauptaxen als die anderen Queraxen, während letztere beiden Axenarten schnittlos zwischeneinander hindurchgehn. Die Axen Q' haben die Richtung der Axe der Rhombensäule.

Einige Specialfälle. Die Punktpaare der Projektionsfigur können parallel stehn zu einer oder der anderen Seitenart des Elementarrechtecks; ferner können sie sich auf ihre Mittelpunkte zusammenzieh'n. — Die beiden Theilsysteme können so ineinanderstehn, dass sie gar nicht längs der Hauptaxe gegeneinander verschoben sind; u. s. f.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem erster Art. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

2) System der Rhombensäule zweiter Art. $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, 0}$.

Hier sind e', e'', σ' zu verstehn wie bei der Abtheilung α) § 21. Die Queraxe Q fällt mitten zwischen 2 nächste parallele e' .

§ 24. Fortsetzung der Konstruktion der Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen.

δ) *Die 4 Axenarten tauschen sich paarweise aus, so dass immer 2 diagonal gegenüberstehende ineinander fallen.*

Zur Ableitung der hergehörigen Systeme aus denjenigen mit zweizähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung dient die Schraubung um eine Queraxe, welche mitten zwischen 2 Gegenseiten eines Elementarrechtecks verläuft; sie sei z. B. $\parallel e'$. Die Projektionsfigur der hergehörigen Systeme besteht nach Satz 49 aus 2 Schaaren von parallelen gleichen Punktpaaren, deren Mittelpunkte in 2 Axenarten, z. B. A und D , liegen. Die

eine Gruppe ist aus der völlig symmetrischen Stellung gegen die andere so herausgerückt, dass ihre Mittelpunkte in den Mitten der rechteckigen Maschen liegen, die durch die Mittelpunkte der andern gebildet werden (Fig. 48).

Aus dem zweizähligen Säulensystem entspringt das schon vorher unter γ , 1 abgeleitete abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensystem erster Art. Nämlich durch Schraubung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$ geht

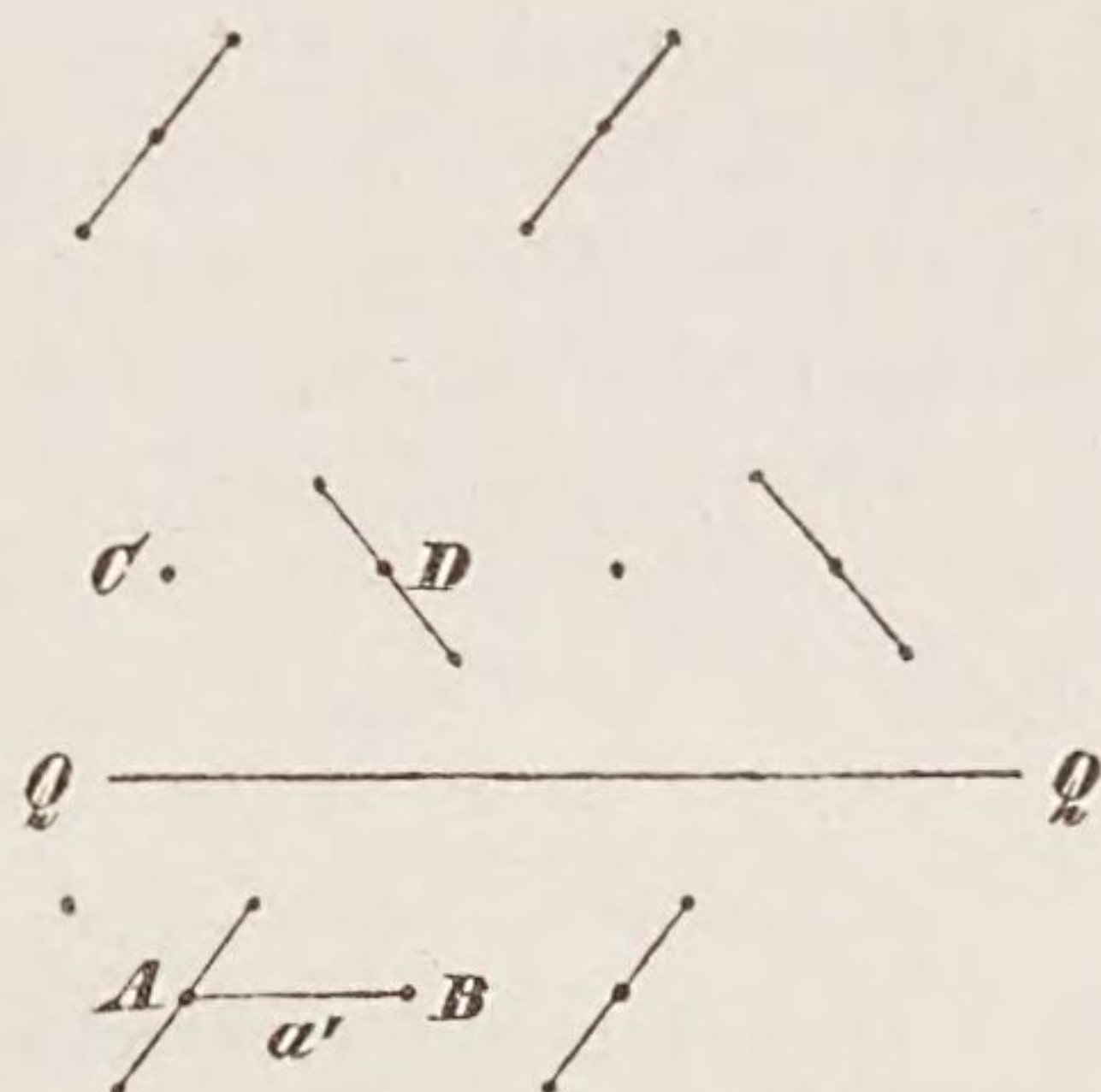


Fig. 48.

aus einer mit Punktpaaren besetzten Hauptebene ein Hauptebenenpaar hervor, welches mit abwechselnd parallelen 2-punktschrauben erfüllt ist, deren Schraubenaxen mit der Konstruktionsaxe parallel laufen. Die Figur ist also eine Projektion des Systems auf eine Ebene parallel diesen Schraubenaxen.

Um ferner aus dem System der klinorhombischen Säule ein hergehöriges abzuleiten, könnte nur der Specialfall β) dienen, wo das Elementarparallelogramm rechteckig ist, und die diagonal gegenüberstehenden Axen gleichartig sind, nämlich ein Paar Drehaxen, das andere Paar Schraubenaxen. Das Symbol dieses Systems ist $A_{\frac{2\pi}{2}, 0}, B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda,$

$(D_{\frac{2\pi}{2}, 0}, \sigma', \sigma'', e''')$. Fügt man nun die Deckbewegung $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$

hinzu, und wendet sie zwei Mal nacheinander an, so ist dies identisch mit einer Schiebung e' . Dies ist nun von vornherein keine Deckschiebung des Systems. Fügt man sie hinzu, so verwandelt sich das Ausgangssystem in das 2-zählige Säulensystem, von welchem eben gezeigt ist, dass es auf kein neues hergehöriges System führt.

Nur aus dem 2-punktschraubensystem geht ein hergehöriges neues System hervor:

1) Das abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensystem zweiter Art¹⁾ (Taf. II. Fig. 14) $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, B_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda,$

1) früher: Rhombisches Wechselstreifensystem.

$(D_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'')$, $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$. Hier sind 2 kongruente Gruppen von 2-punktschrauben entgegengesetzt mitten durcheinander gesteckt, so dass die Axen der Schrauben einer Gruppe in den Mittellinien derjenigen Rektangulärsäulen verlaufen, die durch die Axen der Schrauben der anderen Gruppe gebildet werden.

Aus der mitten zwischen zwei e' verlaufenden Axe $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$, verbunden mit der Deckschiebung λ , resp. mit e'' , folgt die Existenz paralleler Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$ im Abstände $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e''}{2}$. Also haben diese Queraxen ein rechteckiges Schnittpunktsnetz, dessen Maschen-

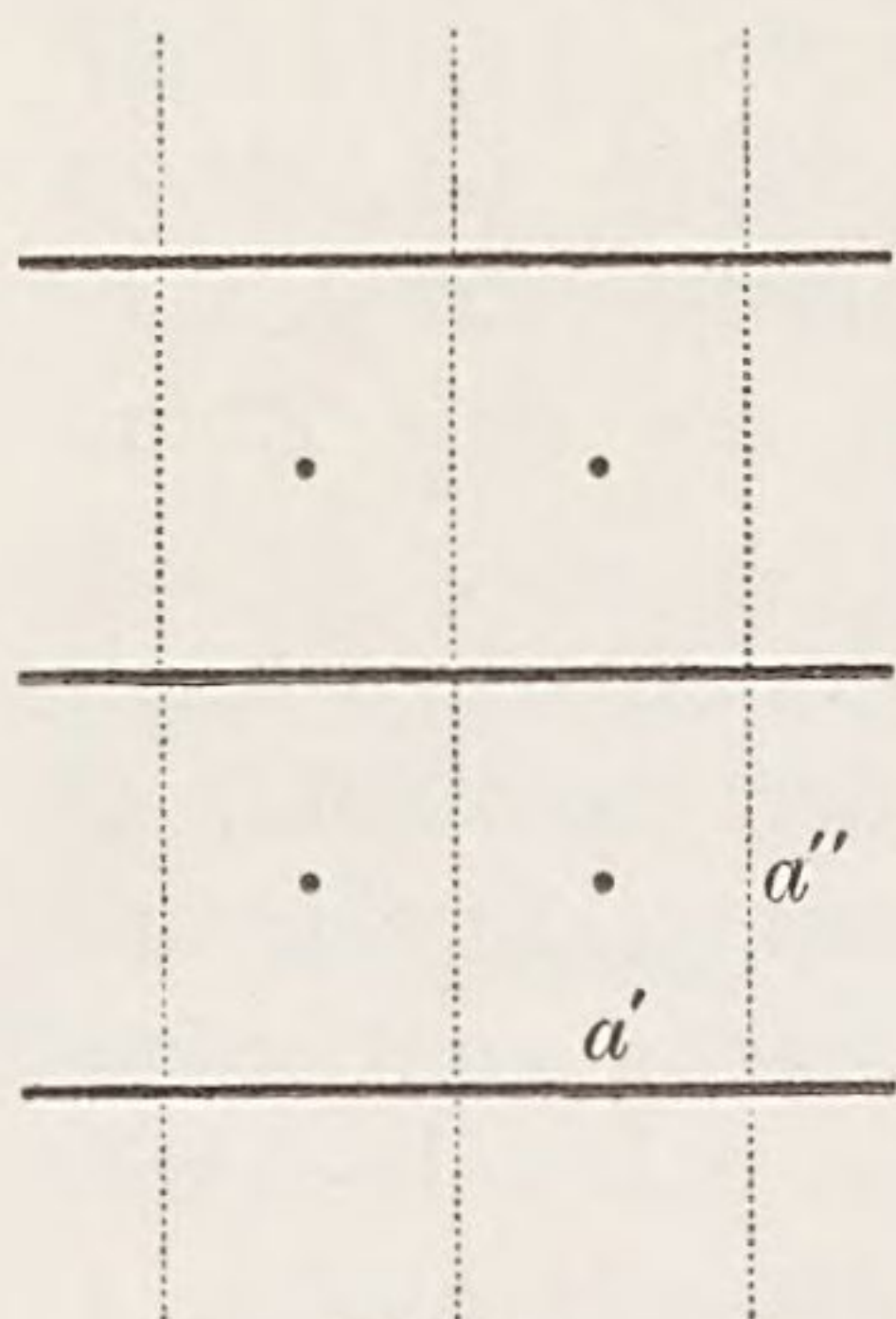


Fig. 49.

Netz der hierzu senkrechten Queraxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e''}{2}}$ hat rechteckige Maschen und zwar mit den Seiten $\frac{\lambda}{2}$ und $\frac{e'}{2}$. Keine Axe schneidet die andere, sondern beide Queraxenschaaren gehn mitten zwischeneinander im Abstände $\frac{\lambda}{4}$, und zwischen den Hauptaxen in den Abständen $\frac{e''}{4}$ resp. $\frac{e'}{4}$ hindurch (Fig. 49). Denkt man in Textfig. 46 die Parallelepipipedkanten resp. $= \frac{\lambda}{2}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$, und lässt man sämtliche mit d bezeichneten Mittellinien fort, so geben die

übrig gebliebenen Mittellinien s die gegenseitige Lage der Axen dieses Systems an.

Einige Specialfälle. Hier gilt dasselbe wie bei γ) (§ 23).

Einziges Punktsystem dieser Abtheilung.

1) Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem zweiter Art. $A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}$.

Die Deckschiebungen e', e'', λ sind senkrecht auf einander. Die Queraxe Q fällt mitten zwischen 2 nächste parallele e' .

Capitel VII.

Punktsysteme mit gleichen Hauptaxen
nach mehr als zwei Richtungen.§ 25. Konstruktion der Systeme mit 3-zähligen gleichen
Hauptaxen, parallel den Radien nach den Ecken
eines regulären Tetraëders.

Die hergehörigen Systeme besitzen nach Satz 18 ausser den dreizähligen Axen, die parallel den Radien nach den Ecken eines Tetraëders gerichtet sind, noch andere dreizählige Axen von entgegengesetzten Richtungen, und zweizählige unter einander gleiche Axen parallel den Radien nach den Tetraëderkantenmitten. Diese letzteren Axen bilden also 3 Paare von je entgegengesetzt gerichteten Schaaren, und zwar verläuft jede Doppelschaar senkrecht zu den beiden anderen. Die 3 Doppelschaaren sind einander kongruent; denn sie müssen durch die Deckbewegungen um die dreizähligen Axen ineinander übergeführt werden.

Immer wenn in einem regelmässigen Punktsystem zweizählige gleiche Axen nur nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, müssen nach Satz 16 noch andere zweizählige Axen vorhanden sein, und zwar erstens solche, die senkrecht zu den vorigen nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, und zweitens solche, die senkrecht zu beiden vorigen Doppelschaaren ebenfalls nach 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen. Die bei solchen Axenrichtungen (längs 3 aufeinander senkrechten Geraden) überhaupt möglichen verschiedenen Anordnungsarten der zweizähligen Axen sind in den §§ 21—24 erschöpfend abgeleitet. Von jenen Anordnungsarten stellen die in der vorliegenden Abtheilung auftretenden Anordnungen in sofern Specialfälle vor, als die 3 Paare von je entgegengesetzt gerichteten zweizähligen Axenschaaren, die dort ungleich waren, hier untereinander kongruent sind, — womit zugleich das Vorhandensein dreizähliger Axen verknüpft ist, die gleich geneigt gegen jene 3 senkrechten Schaarenpaare liegen und dieselben ineinander überführen.

Man konstruirt also alle Systeme der vorliegenden Abtheilung dadurch, dass man bei den Systemen der §§ 21—24

die beiden Paare von Queraxenschaaren untereinander und mit den Hauptaxen kongruent sein lässt (falls dies überhaupt möglich ist), und darauf die Deckbewegung um eine der 3-zähligen Axen 2 mal nacheinander ausführt. Dadurch kommen die 2-zähligen Axen immer nur in Lagen, die schon vorher von gleichen 2-zähligen Axen besetzt waren. Das ganze System aber besteht jetzt aus 3 kongruenten Theilsystemen, die nach 3 senkrechten Richtungen durcheinander gesteckt sind. *Neben den zu diesen 3 Theilsystemen gehörigen Punkten kann kein anderer vorhanden sein.* Ein solcher müsste nämlich mit jedem anderen Systempunkt zur Deckung bringbar sein, so dass zugleich das ganze System mit sich zur Deckung käme. Die dazu erforderliche Deckbewegung würde neue Lagen von zweizähligen Axen nach sich ziehn; solche kann es aber nicht geben, denn 1) können 2-zählige Axen nicht nach anderen als den 3 aufeinander senkrechten Richtungen verlaufen (Satz 18), und 2) können auch in jeder dieser Richtungen Axen nur eine der früher abgeleiteten Anordnungsarten haben. — Hiermit sind sämtliche Systeme dieser Abtheilung konstruirt. Denn wenn es noch ein anderes gäbe, so würde man, falls man die Deckbewegungen um die dreizähligen Axen aus ihm wegliesse, ein regelmässiges System mit 3 Paaren senkrechter Axenschaaren übrig behalten, welches *nicht* mit einem der früher konstruirten identisch wäre. Dies aber ist nicht möglich, weil alle Systeme mit nur 2-zähligen Axen dort (§§ 21—24) erschöpfend abgeleitet worden sind.

Bei der Hälfte aller Systeme der §§ 21—24 erweist es sich nun als unmöglich, dass die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von 2-zähligen Axen einander kongruent werden; nämlich überall da, wo die eine Doppelschaar Drehaxen enthält, die andere nicht; oder wo die eine Doppelschaar Schraubenaxen enthält, die andere nicht. Aus solchen Systemen entspringen also keine hierher gehörigen. So verhält es sich zunächst mit einigen 2-punktschraubensystemen, nämlich mit dem zusammengesetzten rechteckigen, dem zusammengesetzten rhombischen, und dem abwechselnden rechteckigen erster Art (§ 21, 2; § 22, 1; § 23, 1); denn diese sind durch Drehung um eine Queraxe abgeleitet, ihre Queraxenschaaren enthalten also nothwendiger Weise Drehaxen; die Hauptaxen dagegen sind sämtlich Schraubenaxen. Beim

System der Rhombensäule erster Art (§ 21, 3) sind die Hauptaxen theils Dreh-, theils Schraubenaxen, ebenso die Queraxenschaar Q' , während die andre Queraxenschaar Q nur aus Drehaxen besteht. Auch sind hier die Schnittpunktnetze der erstgenannten beiden Axenarten rechteckig und ihre Maschen-seiten sind parallel und senkrecht zur Hauptaxe; dagegen ist das Schnittpunktsnetz der Q rhombisch, und die Maschen-diagonalen sind parallel und senkrecht zur Hauptaxe. Die Kongruenz der 3 Doppelschaaren von Axen ist also hier ausgeschlossen. — Endlich beim System der Rhombensäule zweiter Art (§ 23, 2) bestehn die Hauptaxen und auch die Queraxen Q zur Hälfte aus Dreh-, zur Hälfte aus Schraubenaxen, während die anderen Queraxen Q' sämtlich Schraubenaxen sind. Auch ist nur das Schnittpunktsnetz der letzteren rhombisch, während die Netze der beiden ersteren rechteckig sind. Also ist auch hier die Kongruenz der 3 Doppelschaaren von Axen unmöglich. — Zur Ableitung hergehöriger Systeme bleiben also nur die Systeme 1) und 4) des § 21, 2) und 3) des § 22, und 1) des § 24 übrig.

1) *Das kubische 12-punktnersystem*, $A_{\frac{2\pi}{2},0}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \lambda$, wo ferner Q in e' , und R in die Diagonale eines Würfels mit den Kanten $\frac{\lambda}{2}$ fällt) entspringt aus dem System der rechteckigen Säule (§ 21, 1). Weil in letzterem sämtliche Axen 2-zählige Drehaxen sind, und weil ihre Gesamtheit ein rechtwinklig parallelepipedisches Axennetz mit den Parallelepipedkanten $\frac{\lambda}{2}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$ bildet, so hat man nur $\lambda = e' = e''$ zu machen, um die Kongruenz der 3 Doppelschaaren von Axen herbeizuführen. Dieselben gelangen miteinander zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche in der Diagonale einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen (Kante $= \frac{\lambda}{2}$) des erwähnten Axennetzes liegt. Also sind 3 rechteckige Säulensysteme, bei denen die Centra der gleichflächigen Tetraëder ein kubisches Netz (mit Kante λ) bilden, nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Würfel-

kanten, durcheinandergesteckt, so dass immer 3 Säulenaxen in einem Punkt aufeinander senkrecht stehn. Dieser ist somit der Mittelpunkt von 3 gleichflächigen Tetraëdern zugleich, die nach 3 senkrechten Richtungen durcheinandergesteckt sind, so dass ihre Axen cyklisch vertauscht sind. Ihre 12 Eckpunkte bestimmen zusammen einen Körper, welcher „12-punktner“ heissen mag. Die Figur 54, Taf. V, ist die Projektion eines solchen auf eine durch zwei 2-zählige Axen bestimmte Ebene. Der 12-punktner hat 12 kongruente Ecken; seine Grenzflächen sind 2 Gruppen von je 4 kongruenten gleichseitigen Dreiecken, ferner 12 kongruente ungleichseitige Dreiecke. Durch sein Centrum gehn ausser den 3 aufeinander senkrechten 2-zähligen Drehaxen noch vier 3-zählige Drehaxen, welche mitten in die Oktanten der vorigen hineinragen. Durch Drehung um jede dieser Axen kommt der 12-punktner mit sich zur Deckung. — Das vorliegende System besteht nun aus lauter kongruenten parallelen 12-punktner, deren Centra ein kubisches Raumgitter bilden.

2) Das oktaëdrische 12-punktnersystem $A_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \frac{\lambda}{2}$, wo ferner Q in e' , und R in eine gewisse Diagonale eines Würfels mit den Kanten $\frac{\lambda}{4}$ fällt), entspringt aus dem Rhombenoktaëdersystem (§ 21, 4). In diesem besteht jede der drei aufeinander senkrechten Doppelschaaren halb aus Dreh- und halb aus Schraubenaxen, und alle zusammen bilden ein rechtwinklig parallelepipedisches Axennetz mit den Kanten $\frac{\lambda}{4}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$; dabei stossen in 2 entferntest gegenüberliegenden Parallelepipeddecken je 3 Drehaxen zusammen, während in den übrigen 6 Kanten Schraubenaxen liegen. Macht man nun $\frac{\lambda}{2} = e' = e''$, so werden die 3 Doppelschaaren von Axen kongruent. Sie gelangen miteinander zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche durch jene 2 ausgezeichneten Ecken einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen (Kante $= \frac{\lambda}{4}$) des erwähnten Axennetzes hindurchgeht.

Also sind 3 Rhombenoktaedersysteme, bei denen die Centra der gleichflächigen Tetraeder ein regulär oktaëdrisches Gitter (vergl. Nr. 14 der Bravais'schen Tabelle, pag. 21) bilden, nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Oktaederaxen, durcheinander gesteckt, so dass immer 3 gleichflächige Tetraeder denselben Mittelpunkt haben und somit einen 12-punktner bilden. Das System besteht also aus lauter kongruenten parallelen 12-punktner, deren Centra ein regulär oktaëdrisches Raumgitter bilden.

3) *Das rhombendodekaëdrische 12-punktnersystem**) $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, σ' , σ' , λ , $Q_{\frac{2\pi}{2},0}$, $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, (wo $\delta' = \delta'' = \frac{\lambda}{2}$, wo ferner Q in δ' fällt und 2 Drehaxen schneidet, und endlich R in die Diagonale eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{2}$ fällt), entspringt aus dem System des Oblongoktaeders (§ 22, 2). Letzteres besitzt gleichviel Drehaxen und Schraubenaxen; die Drehaxen bilden für sich ein rechtwinklig parallelepipedisches Netz mit den Maschenkanten $\frac{\lambda}{2}$, δ' , δ'' ; ein diesem kongruentes Netz bilden die Schraubenaxen, doch liegen seine Knotenpunkte in den Mittelpunkten der Maschen des ersteren Netzes. Macht man nun $\frac{\lambda}{2} = \delta' = \delta''$, so werden die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von Axen einander kongruent. Sie gelangen zur Deckung sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche in die Diagonale einer der

jetzt kubisch gewordenen Maschen (Kante $= \frac{\lambda}{2}$) des erwähnten Axennetzes fällt. Jetzt finden sich 3 Oblongoktaedersysteme, bei denen die Centra der gleichflächigen Tetraeder ein kubisches centrirtes Raumgitter bilden (vergl. Nr. 13 der Bravais'schen Tabelle, pag. 21) nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Würfelkanten, durch einander gesteckt, so dass immer 3 gleichflächige Tetraeder denselben Mittelpunkt haben und folglich einen 12-punktner bilden. Das System besteht also aus lauter kongruenten parallelen 12-punktner, deren Centra ein kubisches centrirtes Raumgitter

1) früher: Granatoëdrisches 12-punktnersystem.

bilden, welches man auch als „rhombendodekaëdrisches“ bezeichnen kann, indem die 8 Ecken eines Würfels, zusammen mit den Mitten der 6 an seinen Flächen anliegenden Würfel, die Ecken eines Rhombendodekaëders bilden.

4) *Das reguläre zusammengesetzte 2-punktschraubensystem*¹⁾
 $A_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $\frac{\lambda}{2} = \delta' = \delta''$, wo ferner Q in δ' fällt und 2 Schraubenaxen schneidet, und endlich R in die Diagonale eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{2}$), Taf. IV, Fig. 57,²⁾ entspringt aus dem rhombischen Gegenschraubensystem (§ 22, 3). In letzterem verläuft die Gesamtheit der Axen wie die Mittellinien der Seitenflächen rechtwinklig parallelepipedischer Netzmaschen mit den Kanten $\frac{\lambda}{2}, \delta', \delta''$; hier schneiden sich stets je eine Dreh- und eine Schraubenaxe, und zwar in den Mitten sowohl der Flächen als der Kanten der Parallelepipede. Macht man nun $\frac{\lambda}{2} = \delta' = \delta''$, so werden die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von Axen einander kongruent. Sie gelangen zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine dreizählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3},0}$, welche in die Diagonale einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen (Kante $= \frac{\lambda}{2}$) des erwähnten parallelepipedischen Netzes fällt. Jetzt finden sich 3 rhombische Gegenschraubensysteme, deren Rhomben in Quadrate verwandelt sind (mit Diagonale = der halben Schraubenhöhe), nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Quadratdiagonalen und der Schraubenaxe, durcheinander gesteckt, so dass die Axen von 3 nächsten zusammengesetzten 2-punktschrauben ohne Schnitt zwischen einander hindurchlaufen, gelegen wie 3 nicht zusammenhängende, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende, Kanten eines Würfels von der Kante $\frac{\lambda}{4}$.

5) *Das reguläre abwechselnde 2-punktschraubensystem*³⁾

1) früher: Reguläres Stufenschichtensystem.

2) Zum Verständniss der Figur vergleiche man die den Tafeln vorgedruckte Erklärung.

3) früher: Reguläres Wechselstreifensystem.

$A_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e'}{2}}, R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ (wo $e' = e'' = \lambda$, wo ferner Q mitten zwischen 2 nächste parallele e' , und R in die Diagonale eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{2}$ fällt), Taf. IV. Fig. 58, entspringt aus dem abwechselnden rechteckigen 2-punktschraubensystem zweiter Art (§ 24). In letzterem sind alle Axen Schraubenaxen, die schnittlos zwischeneinander hindurchgehen, gelegen wie die Linien s in der Textfig. 46, in welcher man den Parallelepipedkanten die Längen $\frac{\lambda}{2}, \frac{e'}{2}, \frac{e''}{2}$ ertheilt hat. Macht man jetzt $\lambda = e' = e''$, so werden die 3 aufeinander senkrechten Doppelschaaren von Axen einander kongruent. Sie gelangen zur Deckung, sich cyklisch austauschend, durch Drehung um eine 3-zählige Axe $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$, die in die Diagonale einer der jetzt kubisch gewordenen Maschen (Kante $= \frac{\lambda}{2}$) des erwähnten parallelepipedischen Netzes fällt. Jetzt finden sich 3 abwechselnde rechteckige 2-punktschraubensysteme zweiter Art nach 3 senkrechten Richtungen, nämlich denen der Würfelkanten, durcheinander gesteckt, so dass die Axen von 3 nächsten 2-punktschrauben ohne Schnitt zwischen einander hindurchlaufen, gelegen wie 3 nicht zusammenhängende, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende, Kanten eines Würfels von der Kante $\frac{\lambda}{4}$.

Einige Specialfälle. Bei jedem der 3 ersten Systeme kann der 12-punktner z. B. in das reguläre Tetraëder oder in das mit dem Pentagondodekaëder verbundene Oktaëder übergehen; auch kann er sich auf seinen Mittelpunkt reduciren, wobei das System in eins der 3 regulären Bravais'schen Raumgitter übergeht. Ferner ist zu bemerken, dass das dem 12-punktner zu Grunde liegende gleichflächige Tetraëder im Allgemeinen die eine oder die andere von 2 enantiomorphen Gestalten sein muss (vergl. pag. 112), so dass es ebenfalls 2 enantiomorphe 12-punktner giebt. — Die Systeme 1) und 3) lassen noch eine eigenthümlich andere Auffassung zu: Bei 1) bilden die 2 einander zugewandten Punktpaare je zweier nächster 12-punktner ein gleichflächiges Tetraëder. Daher lässt sich dies System, statt aus 12-punktner, aus diesen isolirten

Tetraëdern aufgebaut denken, deren Centra in den Würfelkanten des kubischen Netzes liegen, das durch die Mitten der 12-punktner bestimmt war. Die Gesamtheit dieser Tetraëder bildet natürlich auch 3 senkrecht durcheinander gesteckte Systeme der rechteckigen Säule (mit kubischer Masche). Bezeichnet man mit 1, 2, 3 das gleichflächige Tetraëder in

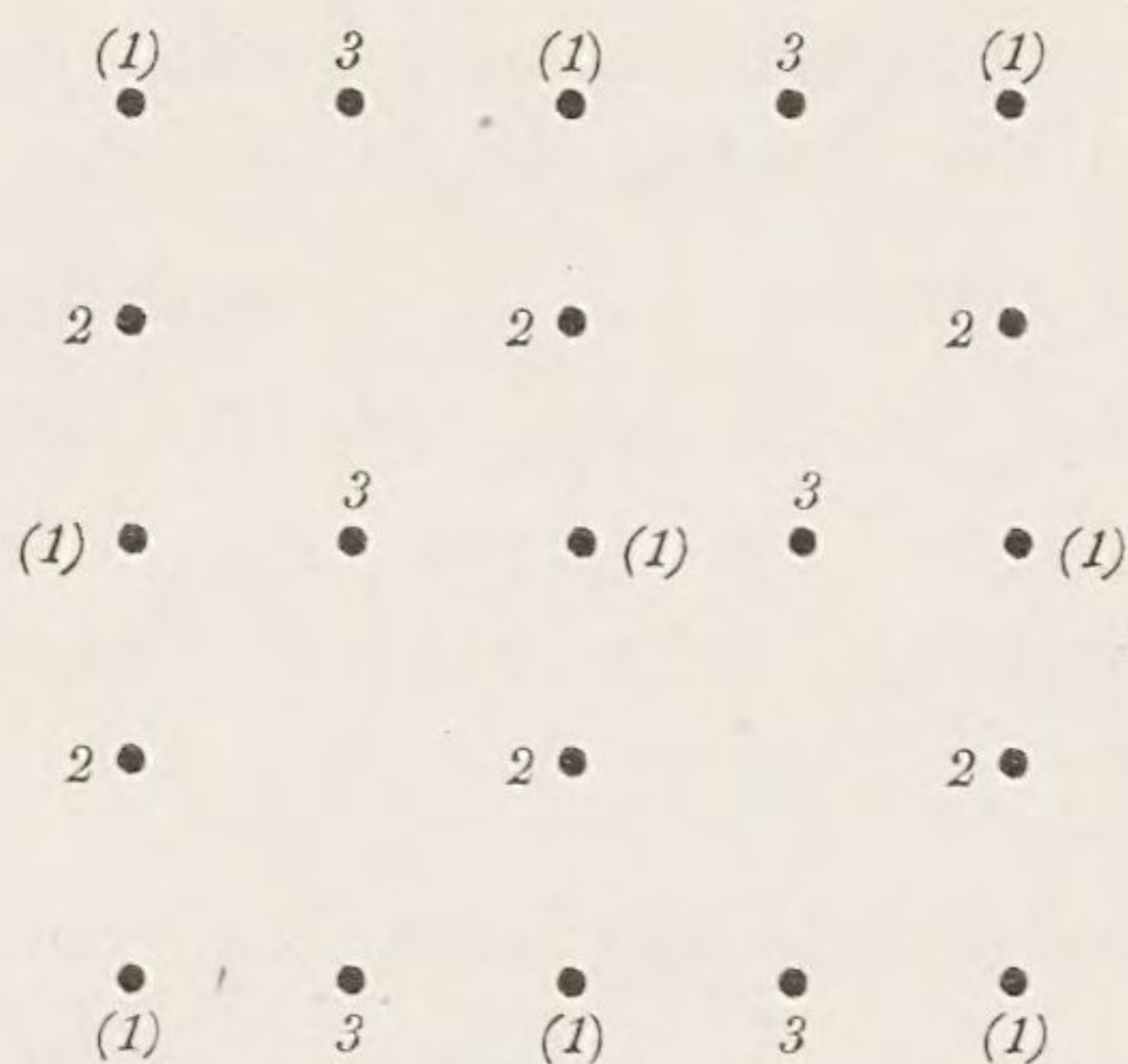


Fig. 50.

den 3 Stellungen, in die es durch dreizählige Drehungen gelangt [diese Stellungen sind parallel jenen, die es im 12-punktner einnimmt], so stellt Fig. 50 die Projektion zweier benachbarter, mit Tetraëdercentren besetzter Ebenen auf eine Würfelmaschenseite vor. Die Centra der Tetraëder 2 und 3 liegen in der Zeichnungsebene oder um ein ganzes Vielfaches von λ von ihr entfernt; die

Centra 1 stehn von der Zeichnungsebene um ein ungrades Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ ab; dies soll durch die Einklammerung der Zahlen (1) ausgedrückt sein. Statt dieser isolirten Tetraëder können nun reguläre oder quadratische Tetraëder oder je 4

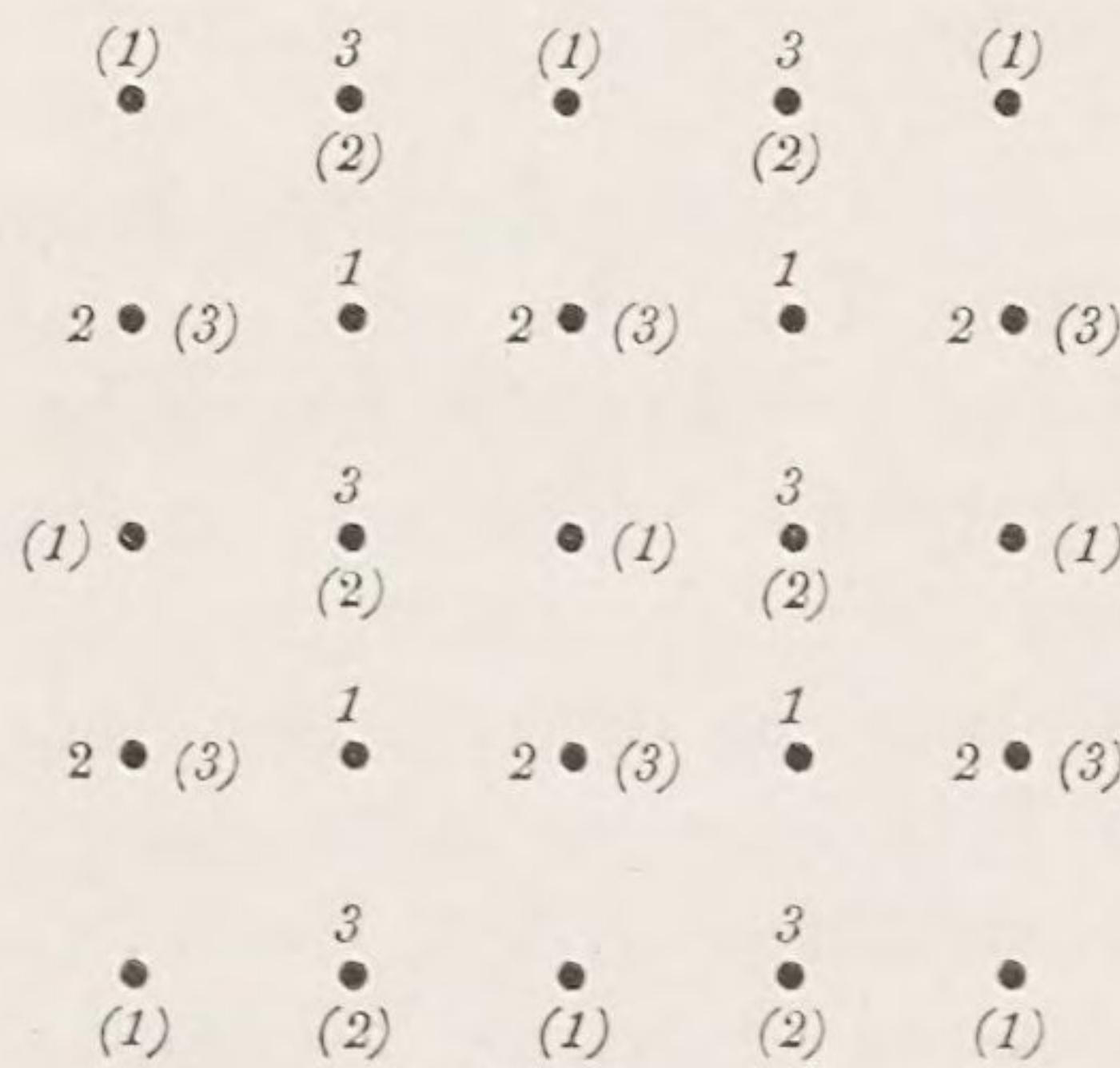


Fig. 51.

Eckpunkte eines Rechtecks oder Quadrats oder auch Punktpaare oder sogar einzelne Punkte (in den Tetraëdermitten) eintreten. — In entsprechender Weise lässt sich das System 3) als aus 2 mitten ineinander gestellten Systemen der vorigen Art gebildet ansehen. Dies veranschaulicht die Fig. 51, die analog der vorigen zu verstehn ist. — Die Specialfälle der beiden regulären 2-punktschrauben-

systeme sind analog denen der einfachen Systeme, aus denen die regulären abgeleitet sind.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser Abtheilung.

1) Kubisches 12-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \lambda$ ist und Q in e' fällt).

2) Oktaëdrisches 12-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \frac{\lambda}{2}$ ist und Q in e' fällt).

3) Rhombendodekaëdrisches 12-punktnersystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $\delta' = \delta'' = \frac{\lambda}{2}$ ist und Q in δ' liegend 2 Drehaxen schneidet).

4) Reguläres zusammengesetztes 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2},0}, \sigma', \sigma', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},0}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $\delta' = \delta'' = \frac{\lambda}{2}$ ist und Q in δ' liegend 2 Schraubenaxen schneidet).

5) Reguläres abwechselndes 2-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}, e', e'', \lambda, Q_{\frac{2\pi}{2},\frac{e'}{2}}, R_{\frac{2\pi}{3},0}$ (wo $e' = e'' = \lambda$ ist und Q mitten zwischen 2 nächste e' fällt).

In allen Symbolen ist R die Diagonale eines gewissen Würfels, dessen Lage bei der Beschreibung jedes einzelnen Systems genau angegeben ist.

§ 26. Konstruktion der Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Oktaëders.

Die hergehörigen Systeme besitzen nach Satz 18 ausser den Hauptaxen noch 3-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Flächenmitten des Oktaëders, und 2-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Kantenmitten desselben. Die Hauptaxen bilden 3 Paare von je entgegengesetzt gerichteten Schaaren, verlaufend parallel dreien aufeinander senkrechten Geraden; und diese 3 Doppelschaaren sind einander kongruent, denn sie müssen durch die Deckbewegungen um die 3-zähligen Axen, welch' letztere ja mit-

ten in die durch jene Axenrichtungen bestimmten Oktanten hineinragen, in einander übergeführt werden.

Fasst man zunächst nur *eine* Doppelschaar von Hauptaxen in's Auge, so ist die einzig mögliche Anordnung für die sie bildenden 4-zähligen Axen von 2 entgegengesetzten Richtungen und für die gleichgerichteten zweizähligen Axen im Satz 29 nebst Zusätzen (Fig. 17) abgeleitet. Das Vorhandensein einer solchen Doppelschaar ist nach Satz 16 nothwendig verknüpft mit dem Vorhandensein von 2 Arten 2-zähliger Queraxen Q und Q' , deren jede Art längs 2 aufeinander senkrechten Geraden verläuft und die Winkel der Richtungen der anderen Art halbirt. Für die Queraxen sind sämtliche überhaupt mögliche verschiedene Anordnungsarten in den §§ 17 und 18 erschöpfend abgeleitet. Auch in den Systemen der vorliegenden Abtheilung muss die eine in's Auge gefasste Doppelschaar 4-zähliger Axen von den 2-zähligen Queraxen Q und Q' begleitet sein. — Was nun die zweite und dritte Doppelschaar von Hauptaxen nebst den zugehörigen 2-zähligen Axen von gleicher Richtung angeht, so können zunächst ihre *Richtungen* (die ja senkrecht aufeinander und auf der ersten Doppelschaar sind), keine anderen sein als die der Queraxen Q oder Q' der ersten Schaar; denn sonst würden noch neue Lagen für die Hauptaxen der ersten Doppelschaar gefordert werden, was unmöglich ist. Aber auch die *absolute Lage* dieser zweiten und dritten Doppelschaar von Axen kann keine andere sein als die jener Queraxen Q oder Q' ; d. h. *die zweite und dritte Doppelschaar muss in eine Art der Queraxen (Q oder Q') der ersten Doppelschaar gänzlich hineinfallen*. Angenommen nämlich, dies wäre nicht der Fall, so würde die Gesamtheit der Axen der zweiten und dritten Doppelschaar durch die *nicht* mit ihnen zusammenfallenden Queraxen der ersten vermehrt werden. Dann müsste — wegen der Kongruenz der 3 Doppelschaaren — auch die erste Doppelschaar noch mehr 2-zählige Axen enthalten; und das ist unmöglich (Satz 29 und Zusatz 2). Somit bleibt nur übrig, dass die zur ersten Doppelschaar gehörigen Queraxen Q oder Q' mit der ersten Doppelschaar selber kongruent werden.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass gewisse 2-zählige Queraxen zugleich 4-zählig werden müssen; dies erfordert,

dass die zweimalige Ausführung der 4-zähligen charakteristischen Deckbewegung identisch sei mit der charakteristischen 2-zähligen Bewegung um die Axe. Nun giebt es nur folgende charakteristische Deckbewegungen 4-zähliger Axen: $A_{\frac{2\pi}{4},0}$, $A_{\frac{2\pi}{4},\frac{\lambda}{2}}$, $A_{\frac{2\pi}{4},\pm\frac{\lambda}{4}}$. Durch zweimalige Ausführung einer jeden derselben entstehen die zweizähligen Bewegungen: $A_{\frac{2\pi}{2},0}$, $A_{\frac{2\pi}{2},\lambda} = A_{\frac{2\pi}{2},0}$ (weil λ allein schon eine Deckbewegung ist), und $A_{\frac{2\pi}{2},\frac{\lambda}{2}}$. In Worten: *Eine zweizählige Schraubenaxe kann zugleich eine 4-zählige Schraubenaxe von halber Schiebungs-komponente sein. Für eine 2-zählige Drehaxe giebt es aber 2 Möglichkeiten, zugleich 4-zählig zu sein, nämlich entweder als 4-zählige Drehaxe oder als 4-zählige Schraubenaxe mit einer Schiebungs-komponente, die halb so gross als die kleinste Deck-schiebung jener Richtung ist.*

Ausser dieser Fähigkeit gewisser 2-zähliger Axen: zugleich 4-zählig zu sein, ist zur Kongruenz einer Doppelschaar 4-zähliger (und ihnen paralleler 2-zähliger) Axen mit einer zugehörigen Queraxenschaar noch zweierlei erforderlich: Erstens müssen die betreffenden beiden Schnittpunktsnetze auf senkrecht schneidenden Ebenen durch passende Wahl der Dimensionen kongruent werden können; und zweitens müssen diese Netze so gegeneinander liegen, dass sie durch Bewegung um eine der zum System gehörigen Axen auch wirklich zur Deckung gelangen können. Diese letztere Bedingung wird jetzt noch weiter untersucht. Eine 4-zählige Axe der dritten Doppelschaar läuft parallel der Schnittlinie der Ebenen der beiden fraglichen Schnittpunktsnetze (LL' oder $L'L''$ der Fig. 35, 36, 38 auf S. 119, 120, 125); also müssen beide Netze durch 4-zählige Bewegung um eine zu dieser Linie parallele Axe zur Deckung kommen können. Nun hat das Schnittpunktsnetz einer Doppelschaar 4-zähliger und gleichgerichteter 2-zähliger Axen quadratische Maschen (Fig. 17), deren Seiten $\frac{e}{2}$ parallel und senkrecht zur Schnittlinie $L'L''$ (Fig. 35, 36, 38) der Hauptebene mit der Schnittpunktsebene der Queraxen Q' verlaufen. Das Schnittpunktsnetz dieser Queraxen Q' hat aber rechteckige Maschen, deren Seiten parallel und senkrecht zu

jener Schnittlinie $L'L''$ liegen. Also können beide Netze durch 4-zählige Bewegung um eine zu $L'L''$ parallele Axe zur Deckung gelangen, falls die rechteckige Masche mit der quadratischen kongruent wird. Das Schnittpunktsnetz der anderen Queraxen Q hat entweder rechteckige Maschen, deren Seiten parallel und senkrecht zur Schnittlinie LL' dieser Netzebene mit der Hauptebene verlaufen (Fig. 35 und 38), oder rhombische Maschen, deren Diagonalen parallel und senkrecht zu LL' sind (Fig. 36). Weil nun in der Hauptebene die Diagonalen der quadratischen Maschen auch parallel und senkrecht zu LL' liegen, so ist durch 4-zählige Bewegung um eine zu LL' parallele Axe das Netz der Q *nur im Falle rhombischer Maschen* mit dem Hauptebennetze deckbar; dazu gehört, dass die Rhomben den Quadraten der Hauptebene kongruent werden.

Zur Ableitung der Systeme der vorliegenden Abtheilung hat man also nacheinander sämtliche Systeme mit 4-zähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen darauf hin zu untersuchen, ob durch passende Wahl des Grössenverhältnisses der Deckschiebungen parallel und senkrecht zur Hauptaxe Kongruenz der einen oder anderen Queraxenschaar mit der zur Hauptaxenrichtung parallelen Axenschaar herbeiführbar ist, wozu nach Vorigem gehört: 1) Kongruenz der beiden Schnittpunktsnetze. 2) Richtige gegenseitige Lage derselben. 3) Fähigkeit gewisser 2-zähliger Axen, zugleich 4-zählig zu sein. Sobald gegen diese 3 Forderungen kein Widerspruch entsteht, ist ein System der neuen Gattung ohne Weiteres konstruirbar: Man hat nur das zum Ausgang gewählte 4-zählige System (des § 17 oder 18) durch die charakteristische Bewegung um eine jetzt 4-zählig gewordene Queraxe in eine neue Lage zu bringen, so dass jetzt die 4-zähligen Hauptaxen senkrecht zur ursprünglichen Richtung verlaufen, und dieses Theilsystem durch die charakteristische Bewegung um eine Hauptaxe des Ausgangssystems wiederum in eine neue Lage, so dass nun die 4-zähligen Axen zu den beiden vorigen Richtungen senkrecht verlaufen. Dadurch werden, nach dem Vorigen, keine neuen Axenlagen hervor gebracht; aber es werden neue Punkte des Raums mit Systempunkten besetzt; hier mussten also von vornherein schon Systempunkte liegen, weil ja alle ausgeführten Bewegungen

Deckbewegungen waren. Zufolge dieser Ableitung besteht also das neue System aus 3 kongruenten, nach 3 senkrechten Richtungen durcheinander gesteckten Theilsystemen (des § 17 oder 18). Eins derselben gelangt in die Lage des zweiten durch 4-zählige Deckbewegung um eine Axe des dritten, während letzteres dabei mit sich selbst zur Deckung kommt. — (Weil die Existenz der 4-zähligen gleichen Axen parallel 3 senkrechten Geraden die Existenz von 3-zähligen Axen nach sich zieht, lässt sich die Konstruktion der hergehörigen Systeme auch so ausführen: Aus einem System des § 17 oder 18 geht durch 3-zählige Bewegungen um gewisse Axen das zweite und dritte der durcheinander gesteckten Theilsysteme hervor). *In einem System dieser Abtheilung kann kein anderer Punkt neben den zu den 3 Theilsystemen gehörigen Punkten existiren.* Nämlich er müsste mit jedem anderen Systempunkt zur Deckung gebracht werden können, so dass zugleich das ganze System mit sich zur Deckung käme. Dies würde nur durch eine neue Deckbewegung möglich sein. Eine solche aber würde neue Lagen der Hauptaxen nach sich ziehn, was unmöglich, weil alle für sie möglichen Lagen schon konstruirt sind.

Es werden nacheinander die Systeme des § 17 in der Reihenfolge 1, 2, 5, 6, 3, 4, und dann die Systeme des § 18 in der Reihenfolge 3, 4, 1, 2 zur Ableitung neuer Systeme zu Grunde gelegt.

Aus dem *zusammengesetzten 4-punktschraubensystem* (§ 17, 1 und 2) leitet sich kein hergehöriges System ab; denn die vorher angestellten Ueberlegungen lehren, dass das Schnittpunktsnetz der Q mit dem Netz der Hauptebene überhaupt nicht deckbar ist (Textfig. 35); und ferner dass das Schnittpunktsnetz der Q' zwar dem Netze der Hauptebene kongruent werden kann, dass aber beide Axenschaaren trotzdem nicht gleich werden können, weil sämtliche Q' Drehaxen, sämtliche Hauptaxen aber Schraubenaxen $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ sind.

1) *Das kubische 24-punktner system* $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}$ [Q' in e ; $e = \lambda$] entspringt aus dem zusammengesetzten Quadratsäulensystem 5) des § 17. Das Netz der Q (Textfig. 35) ist zwar mit dem Netze der Hauptebene nicht deckbar; aber dasjenige der Q' wird

dem Hauptebennetze kongruent, wenn man $\lambda = e$ macht. Alle Axen des Ausgangssystems, sowohl diejenigen in der Hauptaxenrichtung als die Queraxen, sind Drehaxen; also können 2-zählige Queraxen ohne Weiteres zu vierzähligen Drehaxen werden. Vierzählige Drehung um eine zu $L'L''$ der Textfig. 35, und folglich auch zu e parallele Axe versetzt eine Hauptaxe A in eine Axe Q' ; diese werde jetzt A' genannt. Eine jetzt ausgeführte 4-zählige Drehung um eine Hauptaxe A des Ausgangssystems versetzt A' in die neue Lage A'' . Also sind 3 zusammengesetzte Quadratsäulensysteme, deren Säulencentra ein kubisches Raumgitter bilden, nach 3 senkrechten Richtungen, — denen der Würfelkanten — durcheinander gesteckt, so dass immer 3 Säulenaxen A, A', A'' in einem Punkt aufeinander senkrecht stehn. Letzterer ist also der Mittelpunkt von 3 gewundenen Säulen zugleich, die nach 3 senkrechten Richtungen ($\parallel e, e$ und λ) durcheinandergesteckt sind. Ihre 24 Eckpunkte bestimmen zusammen einen Körper, welcher „24-punktner“ heissen mag; er hat 24 kongruente Ecken. Man erhält ihn, wenn man von allen Flächen eines 48-flächners eine um die andere in gleicher Weise mit einem Punkte besetzt; oder man erhält ihn, wenn man zwei 12-punktner so ineinander stellt, dass sie ineinander übergehn durch 4-zählige Drehung um eine ihrer 2-zähligen Axen. Die Fig. 59, Taf. V zeigt seine Projektion auf eine Ebene senkrecht zu einer solchen Axe. Durch sein Centrum gehn ausser den 3 aufeinander senkrechten 4-zähligen Drehaxen noch vier 3-zählige Drehaxen, mitten in die Oktanten der vorigen hineinragend. Durch Drehung um jede dieser Axen kommt der 24-punktner mit sich zur Deckung. — Das vorliegende System besteht aus lauter kongruenten parallelen 24-punktner, deren Centra ein kubisches Raumgitter bilden.

2) *Das rhombendodekaëdrische 24-punktnersystem*¹⁾ $A_{\frac{2\pi}{4},0}, \lambda, \sigma,$

$Q_{\frac{2\pi}{4},0} \left[Q \text{ in } a; a = \frac{\lambda}{2} \right]$ entspringt aus dem zusammengesetzten Quadratoktaëdersystem 6) des § 17. Nämlich das Schnittpunktnetz der Q (Textfig. 36) wird mit dem Hauptebennetze deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = a$ macht. Die beiden Hauptaxenarten

1) früher: Granatoëdrisches 24-punktnersystem.

A und B sind Drehaxen, die ihnen parallelen C sind 2-zählige Schraubenaxen $= C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$. Weil nun die Queraxen Q zum Theil Drehaxen, zum Theil Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ sind, so wird ihre Gesammtheit deckbar mit den A, B, C , sobald $a = \frac{\lambda}{2}$ ist. Bei letzterer Annahme bilden die Centra aller gewundenen Säulen des Quadratoktaëdersystems 2 mitten ineinander gesetzte kubische Raumgitter (Würfelkante $= \lambda$), so dass die Punkte des einen Gitters die Mitten der Würfelmaschen des anderen einnehmen. Nun geht eine zu a parallele Querdrehaxe Q durch das Centrum einer gewundenen Säule; führt man um sie eine 4-zählige Drehung aus, so wird eine Hauptaxe in eine zu ihr senkrechte Lage A' geführt; und 4-zählige Drehung um die ursprüngliche A führt A' in die Lage A'' , senkrecht auf beiden vorigen. Also sind 3 Quadratoktaëdersysteme der speciellen beschriebenen Art nach 3 senkrechten Richtungen ($\parallel a, a$ und λ) durcheinander gesteckt, so dass immer drei 4-zählige Axen in einem Punkt aufeinander senkrecht stehn. Dieser Punkt ist dann der Mittelpunkt eines 24-punktners. Indem somit für jede gewundene Säule des Ausgangssystems ein 24-punktner eintritt, so besteht das ganze System aus lauter kongruenten parallelen 24-punkttern, deren Centra ein kubisches centrirtes Raumgitter, d. h. dasjenige des Rhombendodekaëders, bilden. (Vergl. Bravais' Raumgitter 13 pag. 21, sowie § 25, 3).

3) *Das oktaëdrische 24-punktnersystem*, $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}$, $[Q' \text{ in } e; e = \frac{\lambda}{2}]$ entspringt wie das vorhergehende aus dem zusammengesetzten Quadratoktaëdersystem. Nämlich das Schnittpunktsnetz der Q' (Textfig. 36) wird mit dem Hauptebennetze deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = e$ macht. Die Queraxen sind zum Theil Drehaxen, zum Theil Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$. Erstere werden daher mit den A und B , letztere mit den $C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$ deckbar, sobald $\frac{\lambda}{2} = e$ ist. Bei letzterer Annahme bilden die Centra aller gewundenen Säulen ein Raumgitter der centrirten Quadratsäule, deren Höhe $\sqrt{2}$ mal so

gross ist als die Seite des Basisquadrats, oder mit anderen Worten: ein regulär oktaëdrisches Raumgitter, d. h. ein solches, in welchem je 6 nächste Centra die Ecken eines regulären Oktaëders bestimmen. Ganz wie vorher findet man jetzt 3 Theilsysteme nach 3 senkrechten Richtungen ($\parallel e, e$ und λ) durcheinandergesteckt, so dass immer 3 gewundene Säulen dasselbe Centrum haben und folglich einen 24-punktner bilden. Das ganze System besteht also aus lauter kongruenten parallelen 24-punktner, deren Centra ein kubisches flächen-centrirtes Raumgitter, d. h. dasjenige des regulären Oktaëders bilden. (Vergl. S. 21 Bravais' Raumgitter 14, sowie § 25, 2.)

4) *Das reguläre Gegenschraubensystem erster Art*¹⁾ (Taf. V, Fig. 62), $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}} \left[Q \text{ in } a; a = \frac{\lambda}{2} \right]$ entspringt aus dem vierzähligen zusammengesetzten Gegenschraubensystem 3) des § 17. Nämlich das Schnittpunktsnetz der Q (Textfig. 36) wird mit dem Schnittpunktsnetz in der Hauptebene deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = a$ macht. Die beiden Hauptaxenarten A und B sind 4-zählige Schraubenaxen entgegengesetzten Drehungsinns, die ihnen parallelen 2-zähligen Axen C sind Drehungsaxen. Weil nun die Queraxen Q zum Theil Drehungsaxen, zum Theil Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, a}$ sind, so wird ihre Gesamt-

heit deckbar mit den C, A, B , sobald $\frac{\lambda}{2} = a$ ist. Denn die 2-zähligen Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}}$ können gleichzeitig 4-zählige Schraubenaxen $Q_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}$ sein, so dass sowohl die A als die B in sie hineinfallen können. Führt man nun um eine zu a (oder LL' der Textfig. 36) parallele Querschraubenaxe von dieser Art die Bewegung $Q_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ aus, so wird eine Hauptaxe A in eine zu

A und Q senkrechte Lage A' geführt; und 4-zählige Schraubung um die ursprüngliche A führt A' in die Lage A'' , senkrecht zu beiden vorigen. Die A' und A'' gehn zwischen den A und B schnittlos hindurch, sie treffen aber die C . Also sind 3 zusammengesetzte Gegenschraubensysteme nach 3 senk-

1) früher von mir übersehn; es fehlt auch bei C. Jordan.

rechten Richtungen ($\parallel a, a$ und λ) so durcheinander gesteckt, dass 3 einander nächste, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende Hauptaxen A so liegen, wie 3 nicht zusammenhängende, senkrecht zu einander verlaufende Kanten eines Würfels mit der Kantenlänge $\frac{\lambda}{4}$. Durch 3-zählige Drehung $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ um die Diagonale eines solchen Würfels, welche jene 3 Kanten nicht schneidet, tauschen sich die 3 Theilsysteme cyklisch aus, so dass diese Drehung auch zur Ableitung des Systems aus dem zu Grunde gelegten System dienen kann.

5) *Das reguläre Gegenschraubensystem zweiter Art* (Taf. V. Fig. 63) $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, [Q' \text{ in } e; e = \frac{\lambda}{2}]$ entspringt wie das vorhergehende aus dem vierzähligen zusammengesetzten Gegenschraubensystem. Nämlich das Schnittpunktsnetz der Q' wird mit dem Schnittpunktsnetz der Hauptebene deckbar, wenn man $\frac{\lambda}{2} = e$ macht. Die Queraxen sind theils Dreh-, theils Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, e}$. Diese letzteren nun können, wenn $\frac{\lambda}{2} = e$ wird, zugleich 4-zählige Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}$ sein, so dass sie mit den Hauptaxen A und B deckbar werden. Führt man nun um eine zu e (oder $L'L'$ der Textfig. 36) parallele Querschraubenaxe von dieser Art die Bewegung $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{4}}$ aus, so wird eine Hauptaxe A in eine zu A und Q' senkrechte Lage A' geführt; und diese gelangt nach A'' durch Ausführung der 4-zähligen Schraubung um die ursprüngliche A . Die A' und A'' treffen die B (und C), gehn aber zwischen den A schnittlos hindurch. Also sind 3 zusammengesetzte Gegenschraubensysteme nach 3 senkrechten Richtungen ($\parallel e, e$ und λ) so durcheinander gesteckt, dass 3 einander nächste, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende Hauptaxen A so liegen wie 3 nicht zusammenhängende senkrechte Kanten eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{4}$. Durch 3-zählige Drehung $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ um diejenige Diagonale eines solchen Würfels, welche jene 3 Kanten nicht schneidet, tauschen sich die 3

Theilsysteme cyklisch aus. Also kann $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ auch zur Konstruktion des Systems aus dem zu Grunde gelegten Systeme dienen. [Ein Specialfall von diesem System ist das von Wiener angegebene, aus lauter regelmässigen Tetraëdern aufgebaute System. Vergl. später die Specialfälle.]

6) *Das reguläre zweigängige 4-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. V. Fig. 64) $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$ [Q' in e ; $e = \lambda$] ent-

springt aus dem zweigängigen zusammengesetzten 4-punktschraubensystem 4) des § 17. Das Netz der Q (Textfig. 35) ist zwar mit dem Axenschnittnetz der Hauptebene nicht deckbar, wohl aber das Netz der Q' , sobald man $\lambda = e$ macht. Dann bilden die Centra von 8 nächsten gleichflächigen Tetraëdern die Ecken eines Würfels mit Kante λ . Nun sind die Hauptaxen 2-zählige Drehaxen und zugleich 4-zählige Schraubenaxen ($A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$ und $B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$) und die ihnen parallelen C sind 2-

zählige Drehaxen. Folglich können diese Axen A, B, C mit den Queraxen, die sämtlich 2-zählige Drehaxen sind, deckbar werden. Führt man nun um eine zu $L'L''$ (also zu e) parallele, 4-zählig gewordene Queraxe die Deckbewegung $Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$ aus, so wird eine Hauptaxe A in eine zu A und Q'

senkrechte Lage A' geführt; und diese gelangt nach A'' durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$ um die ursprüngliche A . Die A' und A'' treffen die B (und C), gehn aber mitten zwischen den A schnittlos hindurch. Also sind 3 zweigängige zusammengesetzte 4-punktschraubensysteme nach 3 senkrechten Richtungen ($\parallel e, e$ und λ) so durcheinander gesteckt, dass 3 nächste, nach 3 senkrechten Richtungen verlaufende Schraubenaxen A wie 3 nicht zusammenhängende senkrechte Kanten eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{2}$ verlaufen. Durch 3-zählige Drehung $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ um diejenige Diagonale eines solchen Würfels

die jene 3 Kanten nicht schneidet, tauschen sich die 3 Theilsysteme cyklisch aus; daher kann $R_{\frac{2\pi}{3}, 0}$ zur Konstruktion

1) früher: Reguläres System der gekreuzten Rhombentetraëder.

des Systems aus dem zu Grunde gelegten Theilsystem dienen. —

Von den 4 Systemen des § 18 (Abth. β der 4-zähligen Systeme mit Hauptaxen nach 2 entgegengesetzten Richtungen) sind es nur 1) und 2), welche auf ein hergehöriges neues System führen. Nämlich Fig. 38 auf pag. 125, welche die Schnittpunktsnetze der Queraxen bei allen 4 Systemen veranschaulicht, lässt unmittelbar erkennen, dass das Netz der Q überhaupt nicht mit dem Axenschnittnetz der Hauptebene deckbar werden kann. Obgleich nun das Netz der Q' mit demjenigen der Hauptebene kongruent wird, sobald man $\lambda = e$ macht, so sind doch weder beim abwechselnden zweigängigen 4-punktschraubensystem 3) des § 18, noch beim abwechselnden Quadrat-säulensystem 4) des § 18, die Queraxen selber mit den Hauptaxen deckbar. Denn die Queraxen Q' sind sämtlich 2-zählige Schraubenaxen, die Hauptaxen aber besitzen in beiden Fällen eine 2-zählige Drehung als Deckbewegung. Dadurch ist die Deckbarkeit ausgeschlossen. — Nur aus dem rechten, resp. linken, abwechselnden 4-punktschraubensystem 1) und 2) des § 18 entspringen hergehörige Systeme, nämlich:

7) und 8) *Das rechte, resp. linke, reguläre 4-punktschraubensystem*¹⁾ (Taf. V. Fig. 65, 66) $A_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \pm \frac{\lambda}{4}}, [Q'$ mitten

zwischen 2 nächsten parallelen $e; e = \lambda]$. Bei dem zu Grunde gelegten System wird das Netz der Q' mit dem Axenschnittnetz der Hauptebene kongruent, wenn man $\lambda = e$ macht. Die zugehörigen Axenschaaren werden dann auch deckbar, denn alle Queraxen sind Schraubenaxen $Q'_{\frac{2\pi}{2}, \frac{e}{2}}$, und die zur

Hauptebene senkrechten Axen sind sämtlich Schraubenaxen $(A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, B_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, C_{\frac{2\pi}{2}, \frac{\lambda}{2}})$, welchen die vorigen gleich werden können, sobald $\lambda = e$ ist. Führt man nun um eine zu e (oder $L'L''$ der Textfig. 38) parallele, jetzt 4-zählig gewordene Queraxe die Deckbewegung $Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ aus, so kommt eine Hauptaxe A in

eine zur vorigen Lage und zu Q' senkrechte Lage A' ; und diese Axe gelangt nach A'' durch Ausführung der Bewegung $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ um die ursprüngliche A . Das System besteht also

1) früher: Reguläres Schraubensystem.

aus 3 ($\parallel e, e$ und λ) durcheinander gesteckten abwechselnden

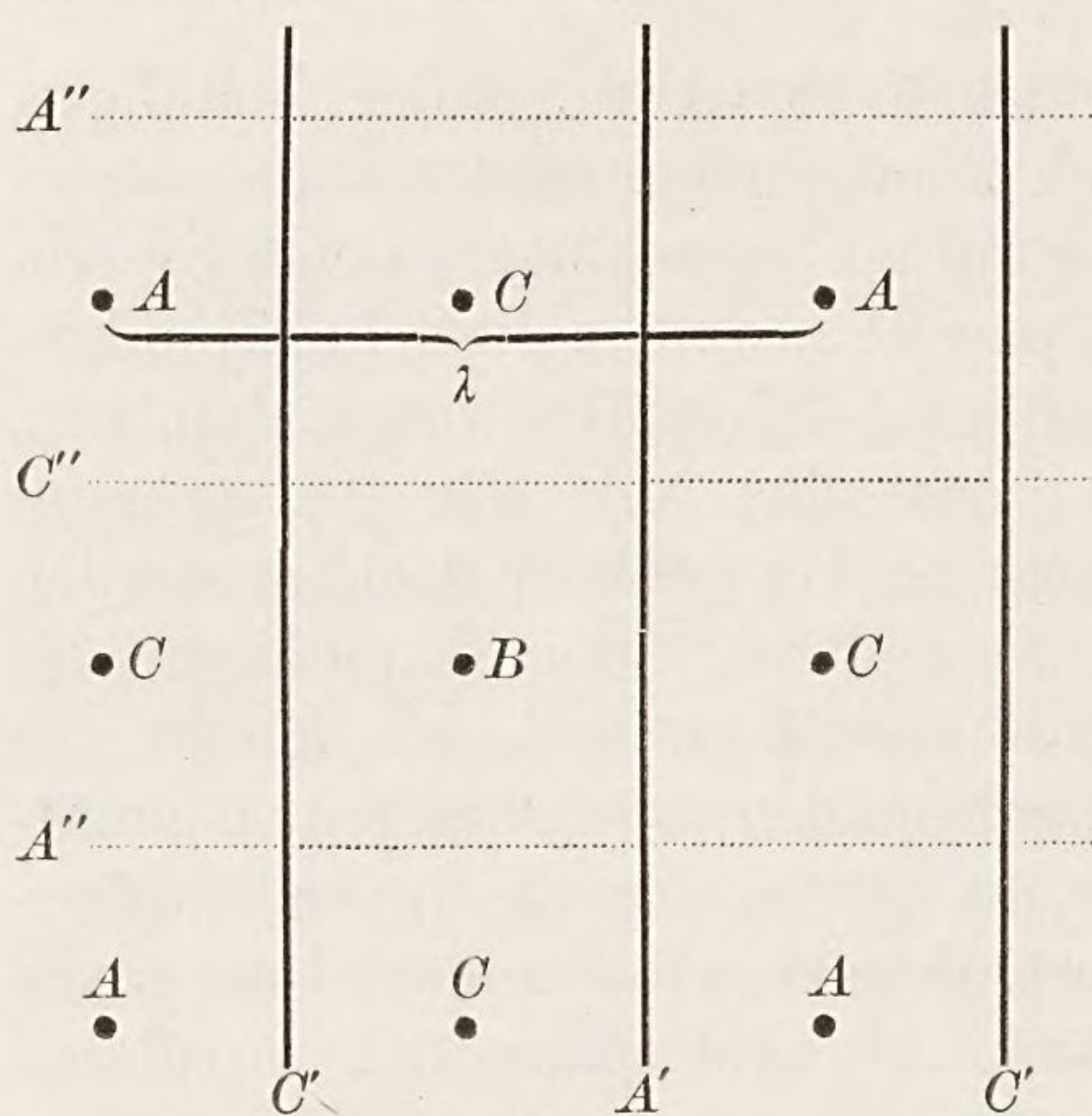


Fig. 52.

4 - punktschraubensystemen. Von ihren sämtlichen Axen schneidet keine die andere, sondern alle laufen in Abständen $\frac{\lambda}{4}$ zwischeneinander hindurch. (Fig. 52, in der die punktirten Linien um $\frac{\lambda}{4}$ unterhalb der Zeichnungsfläche zu denken sind, stellt die Lage der Axen für das *rechte* System dar.) Je nachdem das System ein rechtes

oder linkes ist, ist die Lage der Hauptaxen eine verschiedene; zwar verlaufen 3 nächstbenachbarte Hauptaxen immer so, wie 3 nicht zusammenhängende senkrechte Kanten eines Würfels mit Kante $\frac{\lambda}{4}$; indess, wenn man den Würfel als Rhomboëder ansieht, und diejenige Diagonale, welche jene 3 Kanten nicht trifft, als seine Rhomboëderhauptaxe nimmt, so können jene 3 Kanten, — im Uhrzeigersinn herum verfolgt — entweder die 3 *aufsteigenden*, oder die 3 *absteigenden* Randkanten sein.

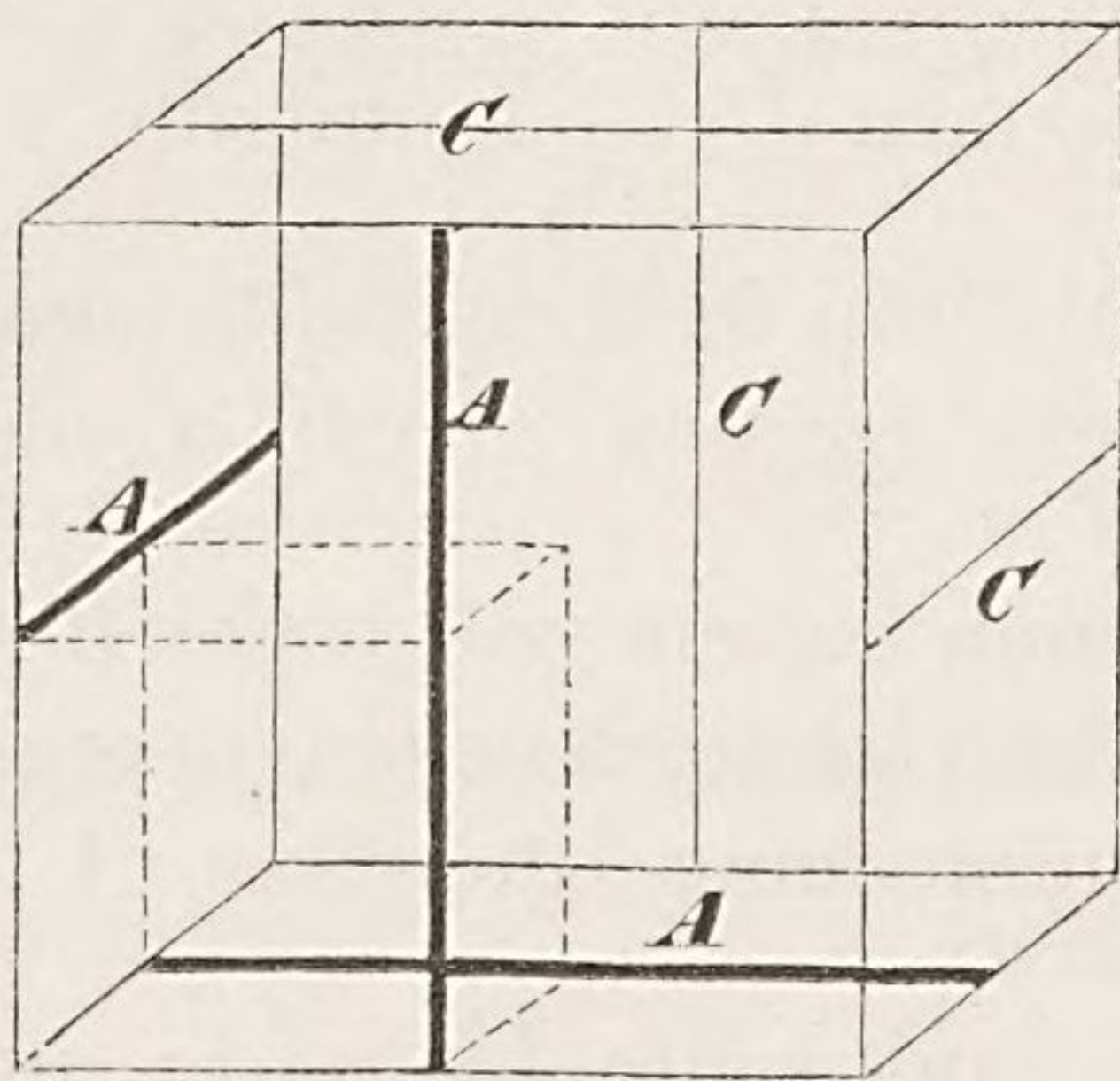


Fig. 53.

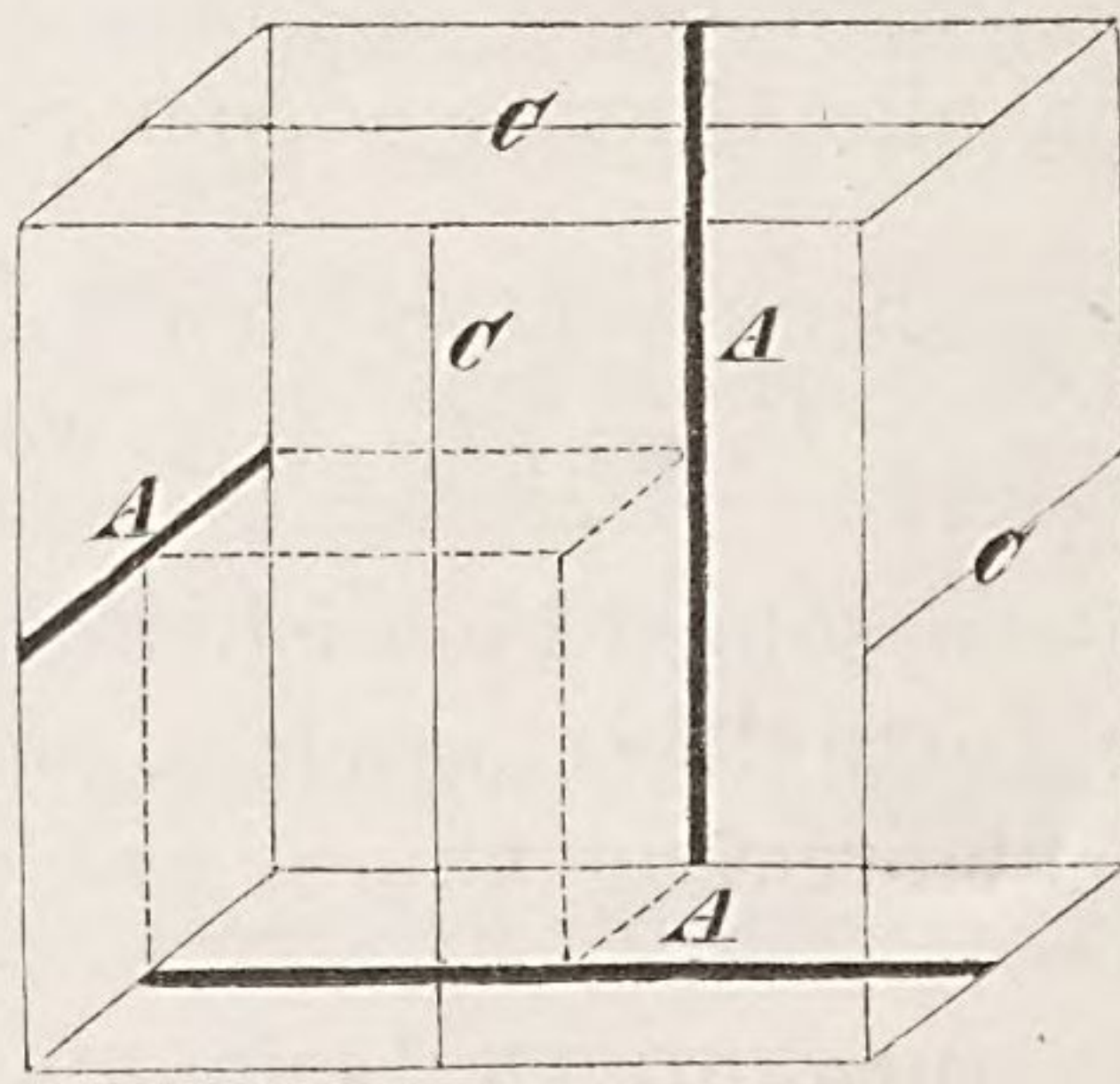


Fig. 54.

Ersteres ist nun der Fall beim *rechten* Schraubensystem, letzteres beim *linken*. Die gegenseitige Lage der Axen A in diesen beiden Fällen zeigen die Figuren 53 und 54, welche

den Würfel mit Kante $\frac{\lambda}{4}$ im Innern eines grösseren Würfels sehn lassen. Für das *rechte* System giebt Fig. 55 die Lage der Hauptaxen (*A* und *B*) sämtlicher Richtungen; die ausgezogenen starken Linien sind die *A*, die punktierten Linien die *B*. — Die sämtlichen Hauptaxen sind von 4-punktschrauben umgeben. Durch 3-zählige Drehung um die vorher als Rhomboëderaxe bezeichnete Diagonale des Würfels

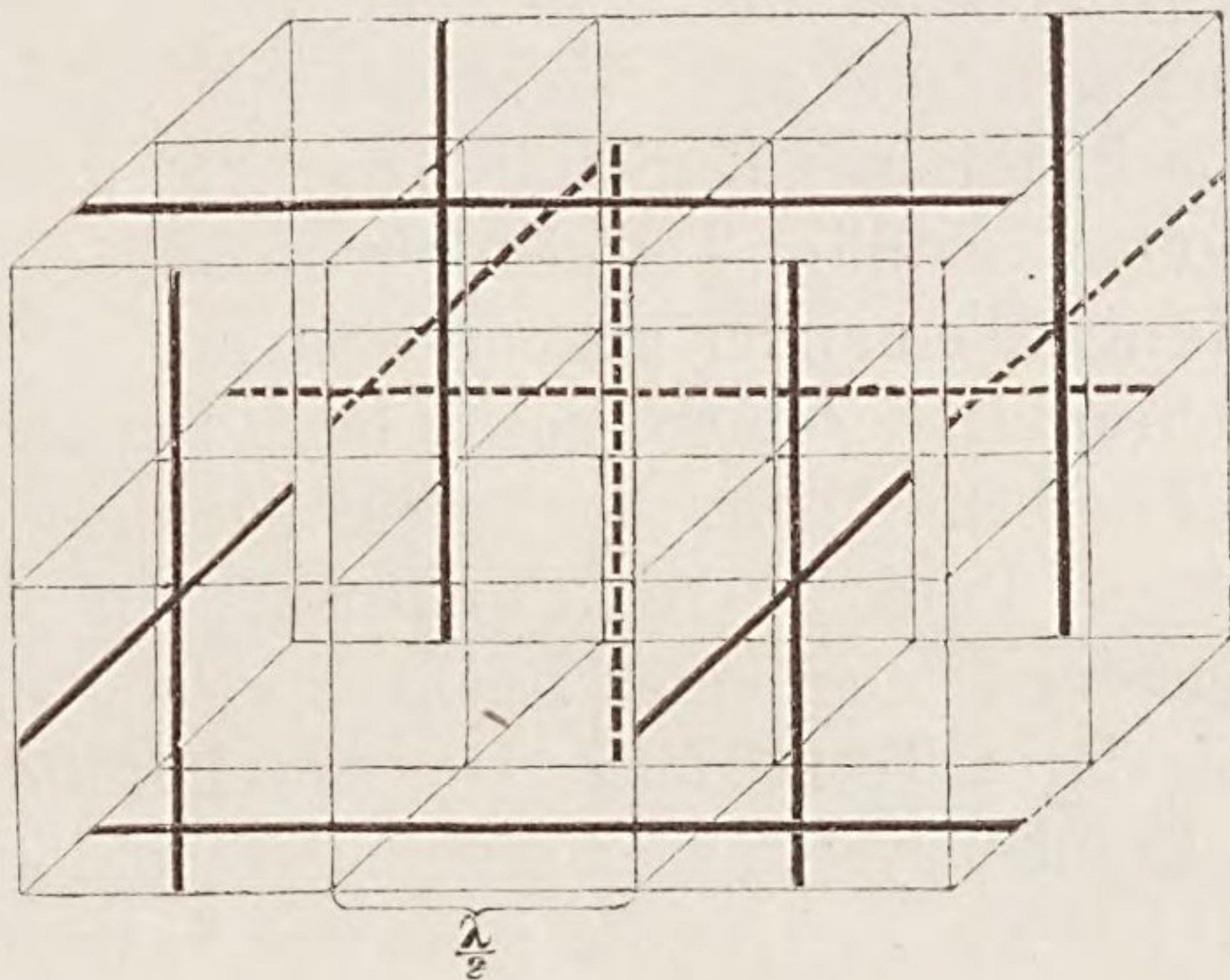


Fig. 55.

mit Kante $\frac{\lambda}{4}$ tauschen sich die 3 Theilsysteme cyklisch aus; also dient diese Drehung auch zur Ableitung dieses Systems aus dem zu Grunde gelegten.

Einige Specialfälle: Bei jedem der 3 ersten Systeme kann der 24-punktner in das reguläre Oktaëder, in den Würfel, in die Kombination von Würfel und Oktaëder, in eine Kombination von Würfel, Oktaëder und Rhombendodekaëder, übergehn; auch kann er sich auf sein Centrum reduciren, wobei das System eins der 3 regulären Bravais'schen Raumgitter wird. Ferner ist zu bemerken, dass der 24-punktner im Allgemeinen eine von 2 enantiomorphen Gestalten sein muss, ebenso wie der 12-punktner. Die 2 einander zugewandten Quadrate zweier benachbarter 24-punktner des kubischen Systems bilden eine gewundene Säule; daher lässt sich dies System auch aus isolirten gewundenen Säulen aufbauen, analog wie das 12-punktnersystem aus isolirten gleichflächigen Tetraëdern. Wenn alsdann noch jede gewundene Säule sich auf ihren Mittelpunkt reducirt, besteht das ganze System aus Punkten in den Kantenmitten eines kubischen Gitters (Textfig. 50). — Bei den regulären Gegenschraubensystemen bilden 2 gegenüberstehende Punktpaare zweier nächster parallelaxiger zusammengesetzter 4-punkt-

schrauben die Ecken eines gleichflächigen Tetraëders. Ist dieses ein reguläres Tetraëder, so fallen beim Gegenschraubensystem zweiter Art die Punkte des zweiten und dritten Theilsystems mit den Eckpunkten der ersteren Tetraëder zusammen, und es entsteht das specielle, schon von Wiener (vgl. die historische Einleitung, pag. 25) gefundene System, bei dem lauter reguläre Tetraëder parallelfächig, aber mit gekreuzten Kanten, einander gegenüberstehn. — Es kann bei den Gegenschraubensystemen, sowie beim 2-gängigen regulären 4-punktschraubensystem, das gleichflächige Tetraëder übergehn in einen Punkt, ein Punktpaar, in die 4 Eckpunkte eines Quadrats oder eines Rechtecks oder eines quadratischen oder regulären Tetraëders. Die Specialfälle des regulären 4-punktschraubensystems endlich sind analog denen des bei seiner Ableitung zu Grunde gelegten Systems.

Zusammenstellung der Punktsysteme dieser
Abtheilung.

1) Kubisches 24-punktner system. $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}$ [Q' in e ; $e = \lambda$].

2) Rhombendodekaëdrisches 24-punktner system. $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{4}, 0}$ [Q in a ; $a = \frac{\lambda}{2}$].

3) Oktaëdrisches 24-punktner system. $A_{\frac{2\pi}{4}, 0}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, 0}$ [Q' in e ; $e = \frac{\lambda}{2}$].

4) Reguläres Gegenschraubensystem erster Art. $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ [Q in a ; $a = \frac{\lambda}{2}$].

5) Reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art. $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}, \lambda, \sigma, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{4}}$ [Q' in e ; $e = \frac{\lambda}{2}$].

6) Reguläres zweigängiges 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4}, \frac{\lambda}{2}}$ [Q' in e ; $e = \lambda$].

7) und 8) Rechtes, resp. linkes, reguläres 4-punktschraubensystem. $A_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}, \lambda, e, Q'_{\frac{2\pi}{4} \pm \frac{\lambda}{4}}$ [Q' mitten zwischen 2 nächsten parallelen e ; $e = \lambda$].

Capitel VIII.

Die Gesammtheit der regelmässigen allseitig
unendlichen Punktsysteme.

§ 27. Uebersichtstabelle.

Zu dieser Tabelle vergleiche man die Tafeln, auf denen die Systeme
in derselben Reihenfolge dargestellt sind.

I. Systeme ohne Axen.

1. Axenloses Raumgitter.

II A) Systeme mit 2-zähligen Hauptaxen von einer
einzigen Richtung.

2. 2-zähliges Säulensystem.

3. 2-punktschraubensystem.

4. System der klinorhombischen Säule.

II B) Systeme mit 2-zähligen gleichen Hauptaxen
von 2 entgegengesetzten Richtungen.*Gruppe α).*

5. System der rechteckigen Säule.

6. Zusammengesetztes rechteckiges 2-punktschraubensystem.

7. System der Rhombensäule erster Art.

8. Rhombenoktaëdersystem.

Gruppe β).

9. Zusammengesetztes rhombisches 2-punktschraubensystem.

10. System des Oblongoktaëders.

11. Rhombisches Gegenschraubensystem.

*Gruppe γ).*12. Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem erster
Art.

13. System der Rhombensäule zweiter Art.

*Gruppe δ).*14. Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem zwei-
ter Art.III A) Systeme mit 3-zähligen Hauptaxen von einer
einzigen Richtung.15. Rechtes } 3-punktschraubensystem.
16. Linkes }

17. 3-seitiges Säulensystem.

18. Rhomboëdersystem.

III B) Systeme mit 3-zähligen gleichen Hauptaxen
von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Gruppe α).

- 19. Rechtes }
20. Linkes } zusammengesetztes 3-punktschraubensystem.
- 21. Zusammengesetztes 3-seitiges Säulensystem.
- 22. Zusammengesetztes Rhomboëdersystem.

Gruppe β).

- 23. Rechtes }
24. Linkes } abwechselndes 3-punktschraubensystem.
- 25. Abwechselndes 3-seitiges Säulensystem.

IV A) Systeme mit 4-zähligen Hauptaxen von einer
einzigen Richtung.

- 26. Rechtes }
27. Linkes } 4-punktschraubensystem.
- 28. 4-zähliges Gegenschraubensystem.
- 29. Zweigängiges 4-punktschraubensystem.
- 30. Quadratsäulensystem.
- 31. Quadratoktaëdersystem.

IV B) Systeme mit 4-zähligen gleichen Hauptaxen
von 2 entgegengesetzten Richtungen.

Gruppe α).

- 32. Rechtes }
33. Linkes } zusammengesetztes 4-punktschraubensystem.
- 34. 4-zähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem.
- 35. Zweigängiges zusammengesetztes 4-punktschraubensystem.
- 36. Zusammengesetztes Quadratsäulensystem.
- 37. Zusammengesetztes Quadratoktaëdersystem.

Gruppe β).

- 38. Rechtes }
39. Linkes } abwechselndes 4-punktschraubensystem.
- 40. Abwechselndes zweigängiges 4-punktschraubensystem.
- 41. Abwechselndes Quadratsäulensystem.

V A) Systeme mit 6-zähligen Hauptaxen von einer
einzigen Richtung.

- 42. Rechtes }
43. Linkes } 6-punktschraubensystem.

44. Rechtes }
 45. Linkes } zweigängiges 6-punktschraubensystem.
 46. Dreigängiges 6-punktschraubensystem.
 47. Hexagonalsäulensystem.

V B) Systeme mit 6-zähligen gleichen Hauptaxen
 von 2 entgegengesetzten Richtungen.

48. Rechtes }
 49. Linkes } zusammengesetztes 6-punktschraubensystem.
 50. Rechtes } zweigängiges zusammengesetztes 6-punktschrau-
 51. Linkes } bensystem.
 52. Dreigängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem.
 53. Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem.

VI) Systeme mit 3-zähligen Hauptaxen von mehr
 als 2 Richtungen.

54. Kubisches
 55. Oktaëdrisches } 12-punktnersystem.
 56. Rhombendodekaëdrisches }
 57. Reguläres zusammengesetztes 2-punktschraubensystem.
 58. Reguläres abwechselndes 2-punktschraubensystem.

VII) Systeme mit 4-zähligen Hauptaxen von mehr
 als 2 Richtungen.

59. Kubisches
 60. Oktaëdrisches } 24-punktnersystem.
 61. Rhombendodekaëdrisches }
 62. Reguläres Gegenschraubensystem erster Art.
 63. „ „ „ zweiter „
 64. Reguläres zweigängiges 4-punktschraubensystem.
 65. Rechtes }
 66. Linkes } reguläres 4-punktschraubensystem.

Diese Tabelle scheint mehr Systeme zu enthalten, als in meiner früheren Schrift angegeben sind. In Wahrheit enthält sie nur No. 62 mehr; im Uebrigen ist die Zahl nur dadurch vergrößert, dass die rechten und linken Schraubensysteme jetzt immer unter 2 verschiedenen Nummern stehn.

§ 28. Beziehung der regelmässigen Punktsysteme zu den Raumgittern.

Unter den Deckbewegungen eines jeden allseitig unendlichen regelmässigen Punktsystems finden sich Schiebungen.

und zwar eine (λ) parallel einer Hauptaxe [falls das System überhaupt Axen besitzt], und zwei oder mehr geneigt gegen dieselbe. Von diesen mehreren geneigten Deckschiebungen ist allerdings überall da nur eine einzige ausdrücklich aufgeführt worden, wo sich die Existenz der übrigen in Folge der Axen von selbst ergibt. Denkt man nun bei der Konstruktion eines Systems zunächst nur diese Deckschiebungen irgend wie oft und in irgend welcher Reihenfolge dem Ausgangspunkte ertheilt, so bilden die von ihm nacheinander erreichten Lagen ein Raumgitter. Fügt man alsdann noch die charakteristischen Deckschraubungen des Systems hinzu, so kommt jenes Raumgitter in neue Lagen; und gleichzeitig ist dann, nach hinreichend oft ausgeführter Schraubung, das ganze System konstruirt. Bei speciellen Annahmen über die Lage des anfänglich gegebenen Punktes gegen die Axen kann jedoch das Raumgitter einfach mit sich selbst zur Deckung kommen. Also hat man den

Satz 52. *Jedes regelmässige allseitig unendliche Punktsystem besteht im Allgemeinen aus mehreren in einander gestellten kongruenten Raumgittern; oder es reducirt sich in speciellen Fällen auf ein einziges Raumgitter. Die Deckschiebungen des Systems sind identisch mit denen des zu Grunde liegenden Raumgitters.*

Wenn man, wie es bei der Beschreibung der Systeme zum Zweck der Veranschaulichung vielfach gethan ist, in Gedanken immer mehrere Punkte zu einer Gruppe zusammenfasst, so findet man die Schwerpunkte dieser Gruppen oft nach einem Raumgitter angeordnet. Die engere Punktgruppe scheint in diesem Falle einer Molekel der Bravaisschen Krystalltheorie zu entsprechen; denn bei Bravais sind die Molekeln nach Raumgittern geordnet und bestehn selbst noch aus Atomen. Daher könnte man meinen, die hier vertretene Auffassung der Krystalle als regelmässiger Punktsysteme sei im Wesentlichen nicht verschieden von der Bravaisschen Theorie. Diese Meinung ist irrig. Denn *erstens* ist bei der neuen Theorie jedes, durch einen Punkt ersetzte, Krystallelement mit den anderen gleichartig, sowohl nach seiner Beschaffenheit als nach seiner Lage gegen alle übrigen Krystallelemente; während dies von den Atomen in einer Bravaisschen Molekel im Allgemeinen keineswegs gilt. Und da jedes Krystallelement der neuen Theorie im Allgemeinen noch aus näheren Bestandtheilen zusammengesetzt zu denken ist, welche entweder unmittelbar die durch die chemische Formel dargestellte Molekel, oder noch einen Komplex von solchen, bilden, so ist dasselbe nur mit der Bravaisschen

Molekel, aber nicht mit den einzelnen Atomen innerhalb derselben, zu vergleichen. *Zweitens* darf nicht vergessen werden, dass jene Zusammenfassung einer bestimmten Zahl von Punkten zu engeren Gruppen *stets* in hohem Grade willkürlich, *oft* aber sogar geradezu unnatürlich ist; dies leuchtet namentlich bei den Schraubensystemen ein, weil hier kein Grund vorliegt, die zur Bildung engerer Gruppen vorzunehmende Zerreißung einer unendlichen n -punktschraube eher an *einer* Stelle als an einer anderen eintreten zu lassen.

§ 29. Modelle.

(Vgl. Taf. V, wo das Modell des rechten zusammengesetzten 6-punktschraubensystems V B, 48 abgebildet ist.)

Um die Anschauung von den regelmässigen unendlichen Punktsystemen zu erleichtern, habe ich einfache Modelle konstruiert, in welchen Wachspierlen von 6—7 mm Durchmesser, mit Siegelack an Stricknadeln befestigt, die Systempunkte vorstellen. Nicht jedes einzelne Punktsystem erfordert ein ganz eigenes Modell; sondern wegen der natürlichen Zusammengehörigkeit der Systeme zu engeren Gruppen ist es meistens möglich, die Systeme einer Gruppe an einem und demselben Hauptmodell zur Darstellung zu bringen; man hat an diesem nur leichte Veränderungen vorzunehmen, um die verschiedenen Systeme der Gruppe hervorzurufen. Nur bei den Abtheilungen VI und VII (Systeme mit gleichen Hauptachsen von mehr als 2 Richtungen) erfordert jedes System sein eigenes Modell. Das axenlose Raumgitter (I, 1) endlich habe ich schon früher durch ein bewegliches Modell dargestellt. (Vgl. Anmerkung auf pag. 20.)

Für die Gesamtheit solcher Systeme, deren Projektion auf eine Hauptebene dieselbe Figur giebt, bedarf es immer nur eines Hauptmodells; also giebt es 13 Hauptmodelle, entsprechend den im Text abgebildeten Projektionsfiguren 22 und 33 auf Seite 82 und 113 (bei 6-zähliger Hauptaxe), 23, 34 und 37 auf Seite 86, 117, 124 (bei 4-zähliger Hauptaxe), 25, 39 und 41 auf Seite 92, 128, 132 (bei 3-zähliger Hauptaxe), 28, 42, 45, 47 und 48 auf Seite 98, 138, 143, 148, 151 (bei 2-zähliger Hauptaxe). Bei jedem Hauptmodell muss nun dafür gesorgt sein, dass sich die Wachspierlen in verschiedene Höhe über die Projektionsebene stellen lassen. Dazu bedarf es einer Geradföhrung für die perlentragenden Stricknadeln, sowie geeigneter Untersätze unterhalb der Projektionsfigur, um die Nadeln in der richtigen Höhe stehend zu erhalten. Zur Erreichung des ersteren Zwecks dienen 2 im Abstände von etwa 2 cm befindliche gleichgrosse parallele

Brettchen (16 cm lang, 12 cm breit), die in kongruenter Weise mit Löchern (von hinreichender Weite, um die Nadeln leicht durchgehn zu lassen) durchbohrt sind. Die Löcher jedes Brettchens sind angeordnet wie die Punkte der betreffenden Projektionsfigur. Beide Brettchen sind vermittelt zweier, an jeder Seite zwischen ihnen liegender, Leisten miteinander verbunden. Bei Horizontalstellung der Brettchen liegt je ein Loch des oberen Brettchens senkrecht über einem Loch des unteren; durch jedes solche Lochpaar ist immer eine Nadel gesteckt. Jede Nadel trägt 2 Perlen, deren Abstand gleich der kleinsten zur Hauptaxe parallelen Deckschiebung λ ist. — Das Brettchenpaar mit den sämmtlichen perlenbesetzten Nadeln bildet ein *Hauptmodell*; es liegt auf 2 Leisten, die innen an 2 Seitenwänden eines vorn und oben offenen Kästchens angebracht sind. — Um nun die Perlen in eine gewisse verlangte Höhe stellen zu können, dient jedesmal ein *Untersatz*, bestehend aus Holzklötzchen, die in passender Grösse und Anordnung auf einem Brett befestigt sind. Um ihn unterstellen zu können, hebt man zunächst — unter Festhaltung des Brettchenpaares — alle Nadeln des Hauptmodells vermittelt eines untergeschobenen glatten Brettchens in die Höhe, setzt darauf den betreffenden Untersatz in das Kästchen ein und zieht das untergeschobene glatte Brettchen weg. Dann fallen die einzelnen Stricknadeln auf die Klötzchen des Untersatzes, und die Perlen stehn in den verlangten Höhen. — Für 2 solche Hauptmodelle, welche in gleicher Anordnung n -ecke, resp. $2n$ -ecke tragen (entsprechend Systemen mit n -zähliger Hauptaxe von einer Richtung, resp. mit ineinander fallenden n -zähligen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen), hat man natürlich nur eine und dieselbe Reihe von Untersätzen nöthig, wenn die Klötzchen breit genug gemacht sind.

Jedes Modell für ein System der Abtheilungen VI und VII besteht aus 3, unter rechten Winkeln zu einer körperlichen Ecke zusammengefügtten Brettchen, jedes mit perlentragenden Nadeln besetzt. So sieht man unmittelbar, wie jedes dieser Systeme aus 3, nach den 3 Dimensionen durcheinander gesteckten Theilsystemen besteht. — Für die Systeme, welche aus 12-punktern, resp. aus 24-punktern bestehend angesehen werden können, habe ich nur das Modell eines 12-punktners und eines 24-punktners hergestellt.

Die Modelle sind nach meinen Angaben von Herrn Mechaniker A. Heckmann in Karlsruhe verfertigt und befinden sich im physikalischen Kabinet des Karlsruher Polytechnikums.

Abschnitt III.

Prüfung der Theorie an der Erfahrung.

Capitel IX.

Geometrische Eigenschaften der Krystalle.

§ 30. Die Krystallsysteme.

Um die im Vorigen entwickelte Theorie an der Erfahrung zu prüfen, sollen zunächst die geometrischen Eigenschaften der Krystalle mit denjenigen der regelmässigen Punktsysteme verglichen werden. Nun ist bei den Krystallen nur die Lage der Grenzflächen und die durch sie erzeugte Krystallgestalt, aber nicht die Anordnung der Krystallelemente oder die Struktur, der unmittelbaren Beobachtung zugänglich. Dagegen kennt man bei den Punktsystemen zunächst nur die Anordnung der Punkte, und es ist eine erst noch zu lösende Aufgabe (die vermuthlich eine eigene, wohl auf die Molekularkräfte bezügliche, Hypothese erfordern wird): zu ermitteln, welche Grenzflächen auftreten müssen, wenn Molekeln zu einer der, nach dieser Theorie möglichen, Strukturformen zusammentreten. In Folge dessen kann sich die geometrische Vergleichung der Krystalle und der Punktsysteme nur auf die allgemeinen Symmetrieverhältnisse beziehen.

Die Gesammtheit der bekannten Krystalle zerfällt, nach dem Grade der ihnen innewohnenden Symmetrie, in 7 Hauptgruppen oder Krystallsysteme. Für jedes Krystallsystem ist das Vorhandensein gewisser *Symmetriemaxen* (vergl. ihre Erklärung auf pag. 19) charakteristisch, nur *einem* Krystallsystem fehlen sie gänzlich. Neben den charakteristischen Symmetriemaxen können (resp. müssen) in einigen Systemen auch noch andere Symmetriemaxen vorkommen. Damit die Charakterisirung eines Krystalls durch Symmetriemaxen möglich sei, muss man ihn völlig regelmässig und unverzerrt ausgebildet, und alsdann die Symmetriemaxen durch seinen

Mittelpunkt gelegt denken. So kennt man erfahrungsmässig folgende Krystallsysteme¹⁾:

1. Triklines System. Keine Symmetrieaxe (I).
2. Monoklines System. Eine 2-zählige Symmetrieaxe (II A).
3. Rhombisches System. Drei ungleiche aufeinander senkrechte 2-zählige Symmetrieachsen (II B).
4. Rhomboëdrisches System. Eine 3-zählige Symmetrieaxe, begleitet oder nicht von 2-zähligen Querachsen (III B und A).
5. Quadratisches System. Eine 4-zählige Symmetrieaxe, begleitet oder nicht von 2-zähligen Querachsen (IV B und A).
6. Hexagonales System. Eine 6-zählige Symmetrieaxe, begleitet oder nicht von 2-zähligen Querachsen (V B und A).
7. Reguläres System. Vier gleiche 3-zählige Symmetrieachsen, parallel den Diagonalen eines Würfels; daneben entweder drei gleiche 4-zählige, oder drei gleiche 2-zählige Symmetrieachsen, parallel den Kanten desselben Würfels (VII und VI).

In jedem dieser Systeme, mit Ausnahme der beiden ersten, giebt es Krystalle, welche nach den beiden Richtungen derjenigen geraden Linie hin, in welcher eine charakteristische Symmetrieaxe verläuft, geometrisch gleichartig sind, so dass sie durch Drehung um eine gewisse zur Symmetrieaxe senkrechte Gerade um 180° , mit sich selbst zur Deckung gelangen, wobei dann die Symmetrieaxe wieder in die frühere Gerade fällt, aber nach entgegengesetzter Richtung in ihr verläuft. Ein solcher Krystall besitzt also, wie man sich ausdrücken darf, gleiche Symmetrieachsen nach 2 entgegengesetzten Richtungen. Beachtet man dies, so lehrt die Vergleichung der Uebersichtstabelle der Punktsysteme (§ 27) mit den 7 Krystallsystemen, dass jedem der letzteren eine oder zwei von den Hauptabtheilungen regelmässiger Punktsysteme entsprechen, indem sie dieselben charakteristischen Symmetrieachsen besitzen; die Nummern dieser entsprechenden Ab-

1) Die hier angewandte Charakterisirung der Krystallsysteme durch Symmetrieachsen ist zwar nicht allgemein üblich, aber sie hat vor anderen Charakterisirungen gewisse Vorzüge. Näheres darüber im folgenden §.

theilungen sind in Klammern hinter die Krystallsysteme gesetzt. Zugleich zeigt sich, *dass alle bei regelmässigen unendlichen Punktsystemen geometrisch möglichen Arten von Symmetrie bei den Krystallen wirklich vorkommen; und ferner, dass dies die einzig vorkommenden Symmetriearten sind.* Dies wird in den folgenden §§ noch eingehender verfolgt werden. *Hiermit sind die Krystallsysteme der Natur, auf Grund der Hypothese von der regelmässigen Anordnung der Krystallelemente, als nothwendige Abtheilungen begriffen.*

Anmerkung. Die gewöhnlichen krystallographischen Axen sind mit den hier benutzten Symmetrieaxen nicht identisch. Während letztere als Axen für Deckbewegungen eingeführt sind, sind die ersteren solche *Coordinatenaxen*, auf welche man einen Krystall beziehen muss, damit seine sämtlichen Flächen möglichst einfache Flächenzeichen mit *rationalen Coëfficienten* erhalten; dabei ist unter Flächenzeichen das Verhältniss der durch die Fläche abgeschnittenen Axenstücke (ein jedes als Vielfaches einer für die Axe charakteristischen Grundlänge ausgedrückt) verstanden. Beide Axenarten fallen nur theilweise zusammen. In Systemen mit 3 aufeinander senkrechten Symmetrieaxen (II B, IV B, V B, VI, VII) dienen diese zugleich als Krystallaxen. — Verläuft eine 4-zählige oder 6-zählige Hauptaxe nur nach *einer* Richtung (IV A, V A), so dient sie als eine der Krystallaxen, während als die beiden anderen Axen im ersteren Falle die Quadratseiten des durch die Hauptaxen bestimmten Maschennetzes der Hauptebene, im zweiten Falle die eine Seitenart und die zugehörige Höhe, oder alle drei Seiten der dreieckigen Maschen des Hauptebennetzes dienen. — Verläuft eine 2-zählige Hauptaxe nur nach einer Richtung (II A), so dient sie als eine Krystallaxe, während für die Wahl der beiden anderen eine gewisse Willkür bleibt, so dass verschiedene Krystallographen hier verschieden verfahren. — Bei Systemen mit 3-zähliger Hauptaxe (III A und B) sind 2 verschiedene Festsetzungen über die krystallographischen Axen getroffen worden. Entweder wird eine Axe in die Hauptaxe gelegt und die 2 anderen Axen so, als wenn die Hauptaxe 6-zählig wäre, indem die hergehörigen Krystalle als Halbflächen von 6-zähligen aufgefasst werden; oder man lässt keine Krystallaxe mit der Hauptaxe zusammenfallen, sondern nimmt 3 schiefwinklige Axen, gelegen wie die 3 Polkanten eines Rhomboëders (Miller). — In axenlosen Systemen (I) ist die Wahl der Krystallaxen noch willkürlicher.

§ 31. Halbflächige und viertelflächige Gestalten.

In den meisten Krystallsystemen giebt es Gestalten, die aus anderen Gestalten derselben Systeme geometrisch dadurch ableitbar sind, dass man von jener anderen Gestalt in regelmässiger Weise gewisse Flächen fortlässt und die übrig

bleibenden bis zum gegenseitigen Schnitt erweitert. Je nachdem die Hälfte oder nur der vierte Theil der gesammten Flächenanzahl der ursprünglichen *vollflächigen* (holoëdrischen) Gestalt beibehalten worden ist, heisst die neue Gestalt *halbflächig* (hemiëdrisch) oder *viertelflächig* (tetartoëdrisch). Diese Gestalten sind nicht als zufällige Unregelmässigkeiten in der Ausbildung der Krystalle, sondern als wesentlich in der Natur der Substanz begründet aufzufassen, denn „in der Natur findet eine strenge Scheidung zwischen den holoëdrischen und hemiëdrischen Formen statt, indem eine und dieselbe Mineralart entweder nur holoëdrisch oder nur hemiëdrisch krystallisirt; dieselbe Scheidung besteht auch für die verschiedenen Modalitäten der Hemiëdrie“ (Naumann-Zirkel: Elemente d. Mineralog. 1877. p. 13). Wenn somit die Halb- und Viertelflächigkeit nicht als eine untergeordnete Erscheinung, sondern als gleichberechtigt mit der Vollflächigkeit zu erachten ist, so ist es nothwendig, bei einer Eintheilung des ganzen Krystallreichs in Krystallsysteme die letzteren so zu definiren, dass sie die Halb- und Viertelflächner wirklich mit umfassen. Diese Forderung ist nicht erfüllt bei der Charakterisirung der Krystallsysteme durch *Symmetrieebenen*, denn diese passt unmittelbar nur auf die Vollflächner, während die Halbflächner, *im Widerspruch mit der allgemeinen Charakteristik der Systeme*, denselben als eine Art Ausnahmeerscheinung angehängt werden müssen. Werden z. B. die Gestalten des regulären Systems dadurch charakterisirt, dass sie 3 aufeinander senkrechte gleiche Symmetrieebenen besitzen, so gehört das Tetraëder nicht zum regulären Krystallsystem, denn es besitzt diese Symmetrieebenen nicht, weder in geometrischer noch physikalischer Beziehung. Dagegen fügen sich bei Charakteristik der Krystallsysteme durch *Symmetrieebenen*, wie sie im vorigen § gegeben ist, die Halb- und Viertelflächner ohne Weiteres in die Krystallsysteme ein, sobald man nur die rhomboëdrischen Gestalten zu einem eigenen System zusammengefasst hat.

Es soll nun die Richtigkeit der im vorigen § ausgesprochenen, aber noch nicht genügend bewiesenen Behauptung, „dass dieselben Symmetriearten, die sich bei den regelmässigen Punktsystemen finden, auch die einzigen bei Krystallen vorkommenden seien“, in diesem § für die halb- und

viertelflächigen Gestalten im Einzelnen nachgewiesen werden. Zu dem Zweck werden jetzt (mit Benutzung von Groths physikalischer Krystallographie) alle bisher beobachteten Arten von Hemiëdrie und Tetartoëdrie auf den Grad ihrer Symmetrie untersucht und der entsprechenden Abtheilung regelmässiger unendlicher Punktsysteme (§ 27) zugewiesen.

1) *Reguläres Krystallsystem.* Beobachtet sind 2 Arten von Hemiëdrie: die *parallelflächige* oder pentagonale, und die *geneigtflächige* oder tetraëdrische. Erstere ist dadurch charakterisirt, dass in dem 48-flächner, als dem allgemeinsten Körper dieses Systems, die abwechselnden Flächenpaare (jedes über einer Pyramidenwürfel Fläche liegend gedacht) fortfallen. Dadurch gehn die 4-zähligen Symmetrieaxen, die den Kanten eines Würfels parallel laufen, in 2-zählige über, und die 3-zähligen, parallel den Diagonalen jenes Würfels, werden zu solchen von nur *einer* Richtung, indem es nicht mehr möglich ist, den entstandenen Körper (das Dyakisdodekaëder) so mit sich zur Deckung zu bringen, dass eine 3-zählige Axe in dieselbe gerade Linie wie vorher fällt, aber nach entgegengesetzter Richtung in ihr verläuft. Die bei den Vollflächnern vorhandenen 2-zähligen Axen aber fallen fort. Es ist genau dieselbe Combination von Axen (nämlich 3-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach den Ecken eines regulären Tetraëders, und 2-zählige gleiche Axen parallel den Radien nach seinen Kantenmitten), wodurch die Abth. VI der regelmässigen Punktsysteme charakterisirt ist. (Vergl. § 25.)

Die *geneigtflächige Hemiëdrie* besteht darin, dass in den abwechselnden Oktanten alle Flächen fortfallen. Die dadurch entstehenden Formen (Tetraëder und andere) besitzen genau dieselben Symmetrieaxen wie die parallelflächig hemiëdrischen Formen, gehören also zu derselben Abth. VI der Punktsysteme. Nur darin unterscheiden sich beide Arten der Hemiëdrie, dass von den 9 Symmetrieebenen, welche die regulären Vollflächner besitzen, bei den parallelflächig hemiëdrischen Gestalten nur die 3 gleichen aufeinander senkrechten Symmetrieebenen vorhanden sind, bei den geneigtflächig hemiëdrischen dagegen nur die 6 gleichen *anderen* Symmetrieebenen (gehend durch je 2 parallele gegenüberliegende Würfelkanten). In entsprechender Weise giebt es unter den Punktsystemen der Abth. VI solche, welche die eine oder

die andere Art von Symmetrieebenen besitzen können (ohne dass sie dieselben jedoch nothwendig besitzen müssen).

Ferner ist das Zusammenvorkommen beider Arten von Hemiëdrie, d. h. also *Tetartoëdrie*, beobachtet. Auch diese Gestalten besitzen noch alle dieselben Symmetriearien, dagegen fehlen ihnen natürlich beide Arten von Symmetrieebenen. Ihnen wohnt also dieselbe Symmetrie inne, wie den Punktsystemen der Abth. VI, welche im Allgemeinen keine Symmetrieebenen zu besitzen brauchen.

Resultat: Alle bisher beobachteten halb- und viertel-flächigen Gestalten des regulären Krystallsystems haben denselben Symmetriecharakter wie die Punktsysteme der Abth. VI.

Geometrisch möglich, aber in der Natur bisher nicht beobachtet, ist noch die *plagiëdrische oder gyroidische Hemiëdrie*, welche darin besteht, dass von einem 48-flächner alle abwechselnden Flächen fortfallen. Hierdurch bleiben alle 4-, 3-, und 2-zähligen Axen unverändert; nur sämtliche Symmetrieebenen fallen fort. Diese Gestalten entsprechen also, gleich den Vollflächnern, genau den Punktsystemen der Abth. VII; denn für letztere ist die Existenz von Symmetrieebenen im Allgemeinen nicht nothwendig, wohl aber für einige von ihnen möglich.

2) *Hexagonales Krystallsystem.* Beobachtet sind 2 Arten von Hemiëdrie und 2 Arten von Tetartoëdrie. Bei der *pyramidalen Hemiëdrie* fallen in der dihexagonalen Pyramide, als der allgemeinsten Gestalt dieses Systems, die abwechselnden Flächen der oberen Pyramide fort, und ebenso die ihnen anstossenden Flächen der unteren; es entsteht eine hexagonale Pyramide dritter Ordnung, d. h. einer Zwischenstellung. Hierbei ist die Hauptaxe 6-zählig geblieben, aber die 2-zähligen Queraxen sind fortgefallen; somit ist genau der Symmetriecharakter der Abth. V A der Punktsysteme entstanden.

Bei der *rhomboëdrischen Hemiëdrie* fallen die abwechselnden je zur oberen oder unteren Pyramide gehörigen Flächenpaare der dihexagonalen Pyramide fort, so dass ein Skalenoëder entsteht. Hierdurch ist die Hauptaxe 3-zählig geworden, und von den 2-zähligen Queraxen sind nur 3 gleiche, unter 120° gegeneinander geneigte (und 3 andere gleiche, die Winkel der vorigen halbirende) übrig geblieben. Es ist dieselbe Symmetrie, welche die Abth. III B der Punktsysteme besitzt.

Diese Krystallabtheilung ist so häufig, dass sie oft (wie auch vorher in § 30) als eigenes Krystallsystem aufgeführt wird.

Bei der *trapezoëdrischen Tetartoëdrie* fallen im Skalenoëder, als dem allgemeinsten Körper der vorigen hemiëdrischen Abtheilung, abwechselnde Flächenpaare fort, ein jedes bestehend aus 2 in einer Randkante zusammenstossenden Flächen. Dadurch bleibt die Hauptaxe 3-zählig, auch die 2-zähligen Queraxen bleiben bestehen. Also entspricht diese Symmetrie noch vollständig der Abth. III B der Punktsysteme. Nur die Symmetrieebenen, welche bei der rhomboëdrischen Hemiëdrie vorhanden sind, fehlen jetzt. Hiermit stimmt es überein, dass einige Systeme der Abth. III B Symmetrieebenen besitzen können, ohne sie jedoch nothwendig besitzen zu müssen.

Bei der *rhomboëdrischen Tetartoëdrie* fallen im Skalenoëder alle abwechselnden Flächen fort, wodurch ein Rhomboëder dritter Ordnung, d. h. einer Zwischenstellung, entsteht. Weil jetzt die Hauptaxe 3-zählig geblieben ist, die 2-zähligen Queraxen aber fortgefallen sind, so besitzen diese Gestalten den Charakter der Punktsysteme der Abth. III A.

Geometrisch möglich, aber in der Natur bisher nicht beobachtet, ist noch eine *trapezoëdrische Hemiëdrie* des hexagonalen Systems. Hier fallen alle abwechselnden Flächen der dihexagonalen Pyramide fort. Dadurch bleibt die Hauptaxe 6-zählig; auch alle 2-zähligen Queraxen bleiben bestehen. Daher gehören diese Gestalten, gleich den Vollflächnern, zu der Punktsystemabtheilung V B; nur besitzen sie, im Gegensatz zu den Vollflächnern, keine Symmetrieebenen, was ja auch bei den entsprechenden Punktsystemen nicht nöthig, bei einigen aber möglich ist.

3) *Tetragonales (quadratisches) Krystallsystem*. Beobachtet sind 3 Arten von Hemiëdrie, die *trapezoëdrische*, *pyramidale* und *sphenoidische* (oder *tetraëdrische*). Bei der *ersten* Art fallen in der ditetragonalen Pyramide, als der allgemeinsten Gestalt dieses Systems, alle abwechselnden Flächen fort, wodurch das tetragonale Trapezoëder entsteht. Hierbei ist die Hauptaxe 4-zählig geblieben, auch die 2-zähligen Queraxen sind noch vorhanden; also ist der Symmetriecharakter, gleich dem der Vollflächner, übereinstimmend mit demjenigen der Abth. IV B der Punktsysteme. Der Unterschied von den Vollflächnern besteht nur in dem Fehlen von Symmetrie-

ebenen, wie ja auch die entsprechenden Punktsysteme keine Symmetrieebenen zu besitzen brauchen, z. Th. aber welche besitzen können.

Bei der *pyramidalen Hemiëdrie* fallen in der ditetragonalen Pyramide die abwechselnden Flächenpaare fort, jedes gebildet von 2 in einer Randkante zusammenstossenden Flächen, wodurch eine tetragonale Pyramide (Quadratoktaëder) dritter Ordnung, d. h. einer Zwischenstellung, entsteht. Dabei ist die Hauptaxe 4-zählig geblieben, aber die Queraxen sind fortgefallen; also ist der Symmetriecharakter gerade derjenige der Abth. IV A der Punktsysteme.

Bei der *sphenoidischen Hemiëdrie* fallen in den abwechselnden Oktanten alle Flächen fort; dadurch entstehn tetragonale Skalenoëder und Sphenoide (Quadrat-Tetraëder). Die vorher 4-zählige Drehaxe wird hierbei 2-zählig, und von den 2-zähligen Queraxen bleiben nur 2 aufeinander senkrechte übrig. Dies ist völlig der Symmetriecharakter der Punktsysteme der Abth. II B, d. h. des rhombischen Krystallsystems. Jedoch ist eine der 3 aufeinander senkrechten 2-zähligen Axen dadurch ausgezeichnet, dass sich 2 aufeinander senkrechte Symmetrieebenen in ihr schneiden, während eine dritte Symmetrieebene nicht vorhanden ist. *Hiermit scheint eine wahre Uebergangsform aus dem quadratischen Krystallsystem in's rhombische vorzuliegen*: Von den 3 senkrechten 2-zähligen Axen ist eine ausgezeichnet, die beiden anderen sind zueinander symmetrisch. Dieser Charakter kommt z. B. dem Punktsystem (No. 5) der rechteckigen Säule zu, wenn man es so specialisirt, dass das Schnittpunktsnetz der Axen von der einen Richtung quadratische Maschen hat, und dass die gleichflächigen Tetraëder (rhombischen Sphenoide), aus denen es aufgebaut gedacht werden kann, die specielle Form tetragonaler Sphenoide (quadratischer Tetraëder) haben. — Andererseits ist es aber auch nicht undenkbar, dass einem solchen Krystall als Strukturform das Punktsystem No. 35, Abth. IV B (oder auch 29, Abth. IV A) zukommt, dessen Hauptaxe eine zweizählige Drehaxe und gleichzeitig eine 4-zählige Schraubenaxe ist, und bei welchem die Mitten von 4 benachbart neben- und übereinander stehenden Punktpaaren die Ecken eines Quadrat-Tetraëders bestimmen.

Geometrisch möglich, aber in der Natur bisher nicht

beobachtet, sind noch 2 Arten von *Tetartoëdrieen*. Bei der ersteren werden *trapezoëdrisch-hemiëdrische* Gestalten nochmals *sphenoidisch-hemiëdrisch*; das dadurch entstehende *rhombische* Sphenoid hat 3 aufeinander senkrechte 2-zählige Axen; dies ist der Symmetriecharakter der Abth. II B. — Die zweite Art von *Tetartoëdrie* entspringt aus dem *Sphenoidischwerden pyramidal hemiëdrischer* Gestalten, wobei ein tetragonales Sphenoid dritter Ordnung (d. h. einer Zwischenstellung) entsteht. Hier existirt nur eine einzige und zwar 2-zählige Axe, entsprechend der Punktsystemabtheilung II A. Auch für diese beiden tetartoëdrischen Formen wäre es übrigens denkbar, dass ihnen als Strukturform No. 35, resp. 29 der Abth. IV B, resp. A, zukommt.

4) *Rhombisches Krystallsystem*. Beobachtet sind 2 Arten von *Hemiëdrie*, die *sphenoidische* oder *tetraëdrische* und die (freilich noch zweifelhafte) *monosymmetrische*. Bei der ersteren fallen in den abwechselnden Oktanten die Flächen fort, wodurch rhombische Sphenoiden entstehen. Hierbei ist mit den 3 aufeinander senkrechten 2-zähligen Axen keine Veränderung vorgegangen, so dass diese Halbflächner, ebenso wie die Vollflächner, denselben Symmetriecharakter wie die Punktsysteme der Abth. II B besitzen. Der Unterschied der Voll- und Halbflächner besteht nur in der Anwesenheit resp. dem Fehlen von Symmetrieebenen; wirklich giebt es auch unter den Punktsystemen jener Abtheilung zahlreiche, welche Symmetrieebenen besitzen können, obwohl sie dieselben nicht nothwendig besitzen müssen.

Bei der *monosymmetrischen Hemiëdrie* fallen von der Rhombenpyramide, als der allgemeinsten Gestalt des Systems, abwechselnde Flächenpaare fort, so dass eine rhombische Hemipyramide — ein augitartiges Paar — übrig bleibt. Hierbei fallen 2 von den 2-zähligen Axen fort; nur eine 2-zählige Axe bleibt übrig; also bietet die Abth. II A der Punktsysteme die entsprechende Symmetrie dar, d. h. der Krystall gehört in das monokline Krystallsystem.

5) *Monoklines Krystallsystem*. Wenn von den 4 Prismenflächen eine um die andere fortfällt, so hört die 2-zählige Axe zu existiren auf, und der Krystall wird zu den axenlosen Punktsystemen (Abth. I) verwiesen. Dieser Fall scheint

beim Orthoklas realisirt zu sein, dessen Prisma aus 2 physikalisch verschiedenen Halbprismen besteht.

Die hiermit beendete Musterung aller Arten von Halb- und Viertelflächigkeit hat erkennen lassen, dass die sämtlichen dabei auftretenden Arten von Symmetrie sich auch bei den regelmässigen Punktsystemen vorfinden.

§ 32. Verschiedenheiten innerhalb eines Krystallsystems.

Von der Thatsache der Existenz sehr verschiedenartiger *Krystallreihen*, und überhaupt mannigfach verschiedener Ausbildungsweisen, *innerhalb eines jeden Krystallsystems* giebt die vorstehende Theorie vollständige Rechenschaft. Nämlich *erstens* gehören — abgesehn von den axenlosen Systemen — in jede der Hauptabtheilungen (deren je eine oder zwei einem Krystallsystem entsprechen), mehrere verschiedene Punktsysteme, wie ein Blick auf die Uebersichtstabelle (§ 27) lehrt. Es gehören also verschiedene Strukturformen in ein und dasselbe Krystallsystem; z. B. findet man unter den Systemen, die den Charakter des rhomboëdrischen Krystallsystems an sich tragen, neben der säulenförmigen Struktur auch die rhomboëdrische und die schraubenförmige vertreten, entsprechend wie unter den Krystallen mit 3-zähliger Hauptaxe ausser solchen mit rein rhomboëdrischem Habitus (z. B. Kalkspath) auch solche vorkommen, die einen schraubenförmigen Bau verrathen, z. B. Quarz. Aehnliches findet sich bei den übrigen Krystallsystemen.

Zweitens sind aber auch innerhalb eines jeden der 66 Punktsysteme noch die mannigfaltigsten Modifikationen möglich. Dieselben sind im Allgemeinen durch 2 Umstände bedingt.

a) *Das Verhältniss der charakteristischen Deckschiebungen und die von ihnen eingeschlossenen Winkel sind bei den meisten Systemen noch nicht vollständig bestimmt*, so dass verschiedene Annahmen darüber verschiedene Modifikationen des Systems liefern. Nur bei den Systemen mit Hauptaxen nach mehr als 2 Richtungen sind die Winkel und die Grössenverhältnisse der Deckbewegungen unveränderlich bestimmt. Dagegen ist bei den Systemen mit 3-, 4- und 6-zähligen Hauptaxen von nur ein oder zwei Richtungen das Verhältniss zweier Deckschiebungen, eine parallel, die andre senkrecht zur Hauptaxe, willkürlich wählbar. Bei Systemen mit 2-zähligen

Hauptaxen von mehr als einer Richtung sind 2 Verhältnisse von Deckschiebungen wählbar; bei 2-zähliger Hauptaxe von einer einzigen Richtung tritt dazu noch die beliebige Wahl eines Winkels. Bei den axenlosen Systemen endlich sind 2 Deckschiebungsverhältnisse und 3 Winkel unbestimmt. —

b) Nach getroffener Wahl über diese willkürlichen Bestimmungsstücke entspringt eine weitere Mannigfaltigkeit innerhalb jedes einzelnen Punktsystems (mit Ausnahme des axenlosen) daraus, *dass der bei der Konstruktion jedes Systems von Anfang an gegeben gedachte Punkt, welchen man, sämtliche Deckbewegungen in beliebiger Reihenfolge und irgend wie oft ausführen lässt, in ganz beliebiger Lage gegen die fest gegebenen Deckbewegungsaxen befindlich sein kann.* Je nach der Wahl über die Lage dieses Punkts können die regelmässigen 2-, 3-, 4- und 6-ecke, welche in den Projektionsfiguren 28, 25, 23, 22 der Systeme mit Hauptaxen von einer einzigen Richtung auftreten, ihre Seiten unter jedem beliebigen Winkel gegen die Seiten des Maschennetzes der Hauptaxenschnitte geneigt zeigen, so jedoch dass alle kongruenten regulären Polygone immer einander parallel stehn. Ferner können die halbregelmässigen 4-, 6-, 8- und 12-ecke, welche in den Projektionsfiguren 42, 45; 39, 41; 34; 33 der Systeme mit gleichen Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen auftreten, sich entweder mehr den entsprechenden regelmässigen Vielecken nähern (resp. wirklich in sie übergehn), oder durch Verkleinerung der einen Seitenart mehr den Vielecken von halb so grosser Seitenzahl nahe kommen (resp. ganz in sie übergehn). Besonders bemerkenswerth sind die (bei den einzelnen Abtheilungen schon hervorgehobenen) Specialfälle, wo die Seiten der regelmässigen 2-, 3-, 4- und 6-ecke parallel mit den Seiten, Höhen oder Diagonalen der Maschen des Axenschnittnetzes sind, und ferner jene Fälle, wo sich die halbregelmässigen Vielecke auf ganz regelmässige von halber Seitenzahl reduciren; denn unter diesen Umständen besitzt die Projektionsfigur gewisse Symmetrieebenen, die senkrecht auf ihr stehn; *und diese Symmetrieebenen kommen dann auch einigen der durch jene Projektionsfigur dargestellten Punktsysteme zu.* — Ausser der Neigung der Polygonseiten gegen die Maschenseiten des Axenschnittnetzes hängt von der Wahl der Lage des anfänglichen Konstruktionspunktes

auch noch das Verhältniss der Dimensionen von Polygonen und Netzmaschen ab. Die Polygone können die allerverschiedenste Grösse haben, ja sie können sich auf ihre Mittelpunkte reduciren. — Eine entsprechende Mannigfaltigkeit wie bei den Systemen mit Hauptaxen von 2 entgegengesetzten Richtungen findet sich bei den Systemen mit Hauptaxen von mehr als 2 Richtungen, deren Konstruktion ja aus den ersteren abgeleitet wurde.

Aus dem Vorstehenden leuchtet also ein, dass eine geradezu grenzenlose Menge verschiedener specieller Typen oder Ausbildungsweisen innerhalb der einzelnen Punktsysteme, um so mehr also innerhalb der grösseren den Krystallsystemen entsprechenden Abtheilungen, geometrisch möglich ist, so dass der Reichthum der Natur an verschiedenen Krystallreihen und Typen auf Grund dieser Theorie vollkommen verständlich wird. — Allerdings ist man gänzlich ausser Stande anzugeben, ob die verschiedenen *geometrisch* möglichen regelmässigen Punktsysteme auch *mechanisch* möglich, d. h. ob sie stabile Gleichgewichtslagen für kongruente Molekeln sind.

Einige specielle Typen, die für die Krystallographie und auch für die Physik von besonderem Interesse sind, sollen nun noch eingehender verfolgt werden.

§ 33. Grenzformen.

Mit diesem Namen bezeichnet man bekanntlich solche Krystallgestalten, welche mit den Formen eines anderen Krystallsystems, zu dem sie in Wahrheit nicht gehören, doch eine sehr grosse Aehnlichkeit haben. Diese kann soweit gehn, dass die Entscheidung durch Winkelmessungen schwer oder gar nicht herbeigeführt werden kann, sondern dass die Untersuchung der optischen Eigenschaften oder die Beobachtung der Aetzfiguren den Ausschlag geben muss. Es mag nicht überflüssig sein, einige Beispiele von Grenzformen hier zusammenzustellen:

Quadratische Formen mit dem Habitus des regulären Systems. *Leucit*, früher für regulär gehalten, ist durch H. v. Rath's genaue Winkelmessungen als quadratisch erkannt, und diese Entdeckung ist sowohl von H. Tschermak durch den Nachweis der optischen Einaxigkeit, als von H. Baumhauer da-

durch bestätigt worden, dass er die 8 Flächen des Quadratoktaeders in Aetzmitteln weniger löslich fand als die anderen 16 Flächen. — Beim *Kupferkies* ist die Hauptaxe so wenig kleiner als die Nebenaxen, dass die Krystalle nicht leicht von regulären Tetraedern unterschieden werden können. — *Jodsaures Ammonium* hat ein Quadratoktaeder, dessen Hauptaxe nur wenig grösser als die Nebenaxen ist, so dass es dem regulären Oktaeder (welches dem chemisch analog konstituirten jodsauren Kalium zukommt) nahe verwandt erscheint.

Rhombische Formen mit dem Habitus des hexagonalen oder des quadratischen Systems. Die Krystallreihe des *Witherit*, dessen Prismenwinkel nicht sehr von 60° abweicht, zeigt grosse Aehnlichkeit mit hexagonalen Gestalten; ebenso die des *Kupferglanzes*. *Kalkuranit*, dessen Prismenwinkel wenig von einem rechten verschieden ist, zeigt in seiner krystallographischen Entwicklung die grösste Aehnlichkeit mit den chemisch analog konstituirten, aber streng quadratischen *Kupferuranit* und *Zeunerit*.

Monokline Formen mit dem Habitus eines Systems von höherer Symmetrie. *Thomsenolith* ist nach H. Nordenskiöld¹⁾ *klinokvadratisch*, d. h. monoklin mit quadratischem Habitus; ebenso nach H. Klein²⁾ das β -*Anisbenzanishydroxylamin*. Letzteres ist, bei einem nur um 5 Minuten von 90° abweichenden Säulenwinkel, dennoch unzweifelhaft optisch 2-axig, und zwar liegen die optischen Axen der verschiedenen Farben in etwas verschiedenen Ebenen und haben verschiedene Axenwinkel; bei allen steht die zweite Mittellinie senkrecht zur Symmetrieebene. *Klinochlor* ist nach H. Schrauf³⁾ *klinohexagonal*, d. h. monoklin mit hexagonalem Habitus. *Wolfram* wurde früher für rhombisch gehalten, aber nach seinem krystallographischen und optischen Verhalten ist er nach H. Des Cloizeaux unzweifelhaft monoklin; dasselbe gilt vom *Datolith*.

Trikline Formen mit dem Habitus eines Systems von höherer Symmetrie. Der trikline *Rhodonit* zeigt sich krystallographisch

1) Vergl. Schrauf „Ueber Klinochlor u. s. f.“ in Tschermaks Mineral. Mittheil. 1874. p. 161.

2) Krystallogr. Mittheilungen II. in Liebigs Annal. d. Chem. Bd. 186. 1877. p. 93 ff.

3) „Ueber Klinochlor“ loco citato.

sehr ähnlich entwickelt wie der monokline *Augit* und wie die rhombischen *Hypersthen* und *Bronzit*; die Winkelverhältnisse der einzelnen Zonen sind bei diesen verschiedenen Mineralien überraschend ähnlich. — *Orthoklas*, welcher mit triklinen Feldspäthen (*Mikroclin*, *Albit*) in Dimensionsverhältnissen, Kombinationen und Zwillingsbildung eine ausserordentliche Aehnlichkeit besitzt, ist in geometrischer Beziehung entschieden monoklin, und doch verweist ihn, wie schon am Ende von § 31 angedeutet, die Verschiedenheit der Spaltbarkeit nach seinen beiden Säulenflächen in das triklone System.

Das Verständniss des eigenthümlichen geometrischen Charakters der Grenzformen bietet für die neue Theorie der Krystallstruktur im Allgemeinen keine Schwierigkeit, denn *fast sämtliche Grenzformen stellen sich einfach als gewisse Specialfälle der allgemeinen regelmässigen Punktsysteme heraus, ohne dass zu ihrer Erklärung noch besondere Annahmen erforderlich wären.* Zunächst kann das Punktsystem 1) der Abth. I (triklines Krystallsystem) dem Charakter eines jeden anderen Krystallsystems *nahe kommen*, denn es ist ein Raumgitter, und ein solches ist, je nach der Beschaffenheit seines parallelepipedischen Kerns, sehr verschiedener Symmetriegrade fähig (vgl. pag. 20 u. 21). Auf eine specielle Grenzform dieses Systems wird nachher noch zurückgekommen. Was ferner die mit Axen begabten Punktsysteme angeht, so wähle man die Verhältnisse der charakteristischen Deckschiebungen, welche im Allgemeinen ganz beliebig sind, besonders einfach (z. B. angenähert oder genau gleich 1), oder man gebe — bei Systemen von geringerer Symmetrie — dem Schnittpunktsnetze der Hauptaxen mit einer Hauptebene genau oder angenähert solche Maschen, wie sie Systemen von höherer Symmetrie zukommen, ohne dass man doch den Axen selber diesen höheren Symmetriegrad (höhere Zähligkeiten) ertheilte: alsdann stellt ein solches Punktsystem die Struktur eines Krystalls vor, der einem Krystallsystem von einer gewissen geringeren Symmetrie angehört, aber gleichzeitig Verwandtschaft zu einem Krystallsystem von höherer Symmetrie darbietet. Dies erhellt aus folgenden Beispielen:

Wird in Punktsystemen mit 2-zähligen Hauptaxen von einer einzigen Richtung (Abth. II A, monoklines Krystallsystem)

der Maschenwinkel des Schnittpunktsnetzes der Axen (Fig. 28, pag. 98) $= 90^\circ$, oder wird, bei beliebigem Maschenwinkel, $e' = e''$, so entsteht der Habitus des rhombischen Krystallsystems, obgleich nicht alle für letzteres charakteristischen 2-zähligen Axen vorhanden sind. (Vgl. z. B. die Specialfälle α, β, γ , zu Nr. 3, § 14, pag. 103, Fig. 29, 30, 31.) Daher hat Naumann Recht, wenn er in Bezug auf Wolfram und Datolith sagt, es seien monokline Krystalle, in denen der schiefe Neigungswinkel der Krystallaxen $= 90^\circ$ geworden sei. — Klinohexagonaler, resp. klinoquadratischer Typus kann u. A. entstehen, wenn in derselben Abtheilung II A der Maschenwinkel des Schnittpunktsnetzes der Axen $= 60^\circ$ oder $= 90^\circ$, und zugleich $e' = e''$ ist. — Wird in Punktsystemen mit 2-zähligen Hauptaxen nach mehr als einer Richtung (Abtheilung II B, rhombisches Krystallsystem) der Maschenwinkel eines rhombischen Axenschnittnetzes nahe oder genau $= 60^\circ$ oder 90° , so entsteht ein hexagonales oder quadratisches Aussehn, trotz des Fehlens einer 6-, resp. 4-zähligen Axe. Quadratischer Habitus entsteht in derselben Abtheilung auch dann, wenn die Maschenseiten eines rechteckigen Schnittpunktsnetzes einander gleich werden. — Wird in Punktsystemen mit 4-zähligen Hauptaxen von ein oder zwei Richtungen (Abtheilung IV A und B, quadratisches Krystallsystem) λ genau oder angenähert $= e$ (oder in gewissen Systemen $= 2e$ oder $= e\sqrt{2}$), so ist — wie bei Ableitung der Systeme der Abth. VIII erhellte — der reguläre Habitus vorhanden, ohne dass man doch das Punktsystem dem regulären Krystallsystem zuzählen dürfte, denn ihm fehlen die für letzteres charakteristischen 3-zähligen Axen. — Wird in Punktsystemen mit rhomboëdrischem Grundgitter (§ 28), (Abth. III A, B, rhomboëdrisches Krystallsystem) die parallelepipedische Grundgittermasche genau oder angenähert zu einem der 3 Rhomboëder, welche bei Raumgittern des regulären Krystallsystems möglich sind, nämlich Würfel, Oktaëder mit 2 angesetzten Tetraëdern, Rhomboëder mit dem Endkantenwinkel 120° , so kann ebenfalls der reguläre Habitus entstehn, ohne dass das Punktsystem wirklich in das reguläre System gehörte, weil ja die 4-zähligen oder die 2-zähligen Axen parallel 3 aufeinander senkrechten Geraden nicht vorhanden sind. — In allen diesen Fällen erklärt

sich der eigenthümliche Charakter der Grenzformen in ganz ungezwungener Weise.

Nur für einen solchen Fall, wie er im Orthoklas vorliegt, dass der geometrisch streng monokline Habitus mit gewissen physikalischen Eigenschaften verknüpft ist, die nur mit dem triklinen System verträglich sind, finden sich keine unmittelbar entsprechenden Specialfälle unter den Punktsystemen. Hier bleibt zur Erklärung nichts anderes übrig als jene Vorstellung anzunehmen, die in der Bravais'schen Theorie der Krystallstruktur zur Erklärung sämtlicher Grenzformen, sowie sämtlicher hemiëdrischen, tetartoëdrischen und hemimorphen Gestalten dienen muss. Diese Vorstellung soll jetzt kurz auseinander gesetzt werden. Dazu werden zunächst die zwischen verschiedenen Raumgittern möglichen Uebergänge betrachtet. Es ist vorher schon hervorgehoben, dass ein Raumgitter den Symmetriegrad eines jeden Krystallsystems genau oder angenähert darbieten kann. Macht man nun über die Kanten und Winkel des Kernparallelepipeds eines Raumgitters solche specielle Annahmen, wie sie den oben gemachten *präcisen* Annahmen entsprechen (z. B. die Kanten genau gleich, oder die Winkel genau $= 60^\circ$ oder 90°), so bemerkt man, dass dadurch Raumgitter von geringerer Symmetrie sofort in solche von höherer Symmetrie übergehn, also unmittelbar die Struktur eines anderen Krystallsystems darstellen als vorher. Macht man z. B. in einem Raumgitter mit quadratisch-säulenförmigem Kernparallelepiped die Säulenhöhe gleich der Seite des Grundquadrats, so wird das Gitter kubisch, gehört also nur in das reguläre Krystallsystem. Ebenso verwandelt sich das Gitter von rhombisch-säulenförmiger Masche durch Annahme des Rhombenwinkels $= 60^\circ$ oder $= 90^\circ$ genau in das Gitter der 6-seitigen resp. der quadratischen Säule, gehört also in aller Strenge dem hexagonalen resp. dem quadratischen Krystallsystem an. Ebenso geht aus einem monoklinen Raumgitter, durch Uebergang des in der Symmetrieebene liegenden Parallelogramms in ein Rechteck, ein solches hervor, welches vollständig und nur in das rhombische Krystallsystem gehört. Lässt man endlich in einem triklinen Raumgitter den Winkel einer Parallelepipedkante gegen die Ebene der beiden anstossenden Kanten gleich 90° werden, oder macht man das Kern-

parallelepiped zu einer klinorhombischen Säule, so entsteht ein vollkommen monoklines Raumgitter. *Um in diesen und ähnlichen Fällen die neben scheinbarer höherer Symmetrie in Wahrheit vorhandene geringere Symmetrie zu erklären, muss man sie nach Bravais' Theorie in die Krystallmolekel verlegen und annehmen, dass die Centra von Molekeln geringerer Symmetrie doch nach einem Raumgitter von höherer Symmetrie angeordnet seien.*

Wenn diese Ansicht über die Natur der Grenzformen — bei dem rein geometrischen Charakter der bisherigen Theorien der Krystallstruktur und bei dem Fehlen der wahren mechanischen Theorie — natürlich nicht für ausgeschlossen erklärt werden kann, so hat sie doch im Allgemeinen geringere Wahrscheinlichkeit als die neue Theorie, welche die Grenzformen, mit äusserst geringen Ausnahmen, in derselben Weise wie alle anderen Krystallformen ohne Weiteres mit umfasst. Nur für einzelne seltenere und versteckte Erscheinungen, z. B. solche, wie sie der Orthoklas darbietet, wird man nicht umhin können, auf die Bravais'sche Vorstellung zurückzugreifen.

§ 34. Hemimorphe Gestalten.

Zu den selteneren Erscheinungen gehört auch die Hemimorphie; „sie besteht darin, dass die Hälfte der Flächen einer Form so ausgewählt erscheint, dass von den beiden Seiten einer Symmetrieaxe die eine von denselben Flächen geschnitten wird wie bei der ganzflächigen Gestalt, die andre von keiner einzigen“. (Vergl. Groth: Physikalische Krystallographie p. 421.) Der hierdurch geometrisch zu Tage tretende Gegensatz der beiden Hälften der Symmetrieaxe (d. h. der beiden durch diese Axe gegebenen Richtungen) offenbart sich auch physikalisch durch die den hemimorphen Krystallen innewohnende Eigenschaft der *polaren* Pyroelektricität, derzufolge die beiden Enden jener Axe während der Erwärmung des Krystalls *entgegengesetzte elektrische* Pole werden (und während der Abkühlung ebenfalls, jedoch mit Umkehrung der Polarität).

Dass eine Axe nach den beiden durch sie gegebenen Richtungen verschieden sein kann, hat für die vorliegende Theorie der Krystallstruktur nichts auffälliges, denn eine

ganze Reihe von Abtheilungen der Punktsysteme ist gerade dadurch charakterisirt, dass in ihnen gleiche Axen nur nach einer Richtung verlaufen und nicht nach der entgegengesetzten, so dass es nicht möglich ist, das System mit sich zur Deckung zu bringen, während die Axen in entgegengesetztem Sinne wie vorher verlaufen. Bei einem solchen Systeme muss daher die Anordnung der Punkte ein anderes Aussehn bieten, je nachdem das System von der einen oder von der anderen Richtung der betreffenden Axe her besehn wird. *Trotzdem kann aus dieser Verschiedenheit beider Axenhälften allein noch keine allgemein gültige Erklärung für die Hemimorphie geschöpft werden.* Denn erstens findet sich jene Verschiedenheit vielfach auch bei nicht hemimorphen Krystallen; zweitens aber weisen die Hemimorphien im monoklinen und im rhombischen System *sogar mit Nothwendigkeit darauf hin, dass, nach Bravais' Vorgange, der Grund der Hemimorphie vielmehr unmittelbar in der Beschaffenheit der Molekel gesucht werden muss.* Um dies zu beweisen, soll jetzt ein Ueberblick über die bisher bekannten Hemimorphien gegeben, und jede einzelne soll derjenigen Punktsystemabtheilung zugeordnet werden, der sie ihrer Symmetrie nach angehört.

1) *Monoklines System.* Rohrzucker, Quercit, Weinsäure besitzen wie alle Krystalle des monoklinen Systems nur eine 2-zählige Drehaxe von einer einzigen Richtung; ihre Struktur kann also jedenfalls nur durch irgend ein System der Abtheilung II A dargestellt sein. Nun aber besitzen alle Systeme dieser Abtheilung (Nr. 2, 3, 4) eine Symmetrieebene senkrecht zur Richtung der 2-zähligen Axen, während diese Symmetrieebene obigen Krystallen fehlt; bei letzteren zeigen vielmehr beide Axenenden ganz verschiedene Flächen. Hieraus folgt, dass die Krystallelemente nicht als Punkte angesehen werden dürfen, sondern dass ihnen bereits diese Verschiedenheit in den beiden entgegengesetzten Richtungen innewohnen muss. Ihre Centra aber bilden eins der obigen 3 Punktsysteme der Abtheilung II A.

2) *Rhombisches System.* Bei Kieselzinkerz, Struvit, Resorcin, Milchzucker, Chinasäure¹⁾ kann es senkrecht zu der

1) Diese ist nach H. A. Knop (Liebig, Ann. d. Chem. u. Pharm. Bd. 119, p. 327) ebenfalls hemimorph.

hemimorphen Axe keine 2-zählige Deckbewegungsaxe geben; denn eine solche würde verlangen, dass wieder Deckung herrsche, wenn die erstere Axe in entgegengesetzter Richtung in sich selbst gelegt ist; und das ist eben nicht der Fall. Also besitzen diese Krystalle nur eine 2-zählige Axe von einer einzigen Richtung, müssen also zunächst der Abtheilung II A der Punktsysteme zugetheilt werden. Nun aber fehlt ihnen, ebenso wie den hemimorphen Krystallen der vorigen Abtheilung, die zur Axe senkrechte Symmetrieebene, welche den Systemen der Abtheilung II A zukommt, so lange man letztere aus Punkten aufgebaut denkt, ohne die eigene Gestalt der Krystallelemente zu beachten. Hieraus folgt wie vorher, dass der Mangel dieser Symmetrieebene in der Beschaffenheit der einzelnen Krystallelemente begründet sein muss. Ferner besitzen die fraglichen Krystalle 2 aufeinander senkrechte, durch die 2-zählige Axe gehende, Symmetrieebenen. Ertheilt man den Punktsystemen der Abth. II A diese 2 Symmetrieebenen, so gehn sie in Systeme der Abth. II B (die dem rhombischen Krystallsystem entspricht) über. Hiernach bleibt für den Bau dieser Krystalle nur folgende Möglichkeit: Die Centra der Krystallelemente bilden ein Punktsystem der Abth. II B (d. h. des rhombischen Krystallsystems); aber die Krystallelemente selber sind in Richtung der einen Axe hemimorph und mit 2 aufeinander senkrechten, durch diese Axe gehenden Symmetrieebenen versehen. Alsdann besitzt der Krystall wirklich nur diese eine 2-zählige Deckbewegungsaxe, während die beiden auf ihr senkrechten 2-zähligen Axen zwar für das System der *Centra* der Krystallelemente Geltung haben, aber nicht für den ganzen, aus Elementen von der angegebenen Beschaffenheit aufgebauten Krystall.

3) *Rhomboëdrisches System.* Turmalin, Antimonsilberblende, überjodsaures Natrium, Tolylphenylketon besitzen eine 3-zählige Axe von nur einer Richtung, gehören also zur Abth. III A.

4) *Quadratisches System.* Jodsuccinimid hat eine 4-zählige Axe von nur einer Richtung, gehört also zur Abth. IV A.

5) *Hexagonales System.* Schwefelkadmium hat eine 6-zählige Axe von nur einer Richtung, gehört also zur Abtheilung V A.

In Betreff der letztgenannten 3 Krystallsysteme lässt

sich nur soviel sagen, dass das Vorhandensein der Axen von einer einzigen Richtung jedenfalls nicht ohne Weiteres als Ursache der Hemimorphie angesehen werden darf; denn durchaus nicht alle Krystalle, welche den Abtheilungen III A, IV A, V A zugehören, sind hemimorph, ebensowenig wie es alle Krystalle der Abth. II A sind. Z. B. ein Krystall, der ein Rhomboëder dritter Ordnung (d. h. einer Zwischenstellung), oder ein ebensolches Quadratoktaëder, oder eine ebensolche hexagonale Pyramide aufweist, besitzt zwar eine Hauptaxe von einer einzigen Richtung (weil es nicht möglich ist, ihn in der Art mit sich zur Deckung zu bringen, dass die Axe nach entgegengesetzter Richtung wie vorher verlief); trotzdem ist er nicht hemimorph und zeigt sich auch nicht polarpyroelektrisch, wie H. Friedel¹⁾ am Apatit nachgewiesen hat. — Hiermit ist gezeigt, dass das Auftreten von Hemimorphie mehr erfordert als das blosse Vorhandensein einer Axe mit 2 nicht deckbaren Hälften; und ferner: dass im rhombischen und monoklinen System die Hemimorphie nicht in der Anordnung der Molekelcentra, sondern nur im Bau der Molekel selbst begründet sein kann; letzteres ist somit auch für die Hemimorphien in anderen Krystallsystemen wahrscheinlich.

Anhang. Ueber den Versuch einer Erweiterung des Begriffs: Hemimorphie. Weil Hemimorphie stets mit polarer Pyroelektricität verknüpft gefunden wird, liegt es nahe, in allen Fällen des Auftretens der letzteren auch Hemimorphie vorauszusetzen, wozu dann freilich der Begriff der Hemimorphie erweitert werden muss. Einzelne dahin zielende Schritte sind schon gethan worden; so namentlich von H. Hankel; doch ist das Beobachtungsmaterial noch nicht reich und sicher genug, um jetzt schon ein endgültiges Urtheil über die Ausführbarkeit jener Erweiterung zu gestatten. Eine, nachher zu erwähnende, Beobachtung des H. Friedel scheint sogar dagegen zu sprechen. Immerhin ist aber der Gegenstand interessant genug, um ein etwas näheres Eingehn an dieser Stelle zu rechtfertigen. — Ausser den vorerwähnten Punktsystemabtheilungen mit Axen von nur einer

1) Friedel: Sur les propriétés pyro-électriques des cristaux bons conducteurs de l'électricité. In den Ann. d. Chém. et d. Phys. 4 série. T. 17. 1869. p. 91.

Richtung giebt es nur noch 2 Abtheilungen, bei denen gleiche Axen je nur nach einer von 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen: das ist Abth. VI mit 4 gleichen 3-zähligen Axen parallel den Radien nach den Ecken eines Tetraëders (und 4 *anderen* 3-zähligen Axen in den entgegengesetzten Richtungen), und Abth. III B mit 3 gleichen 2-zähligen Queraxen nach 3 unter 120^0 verschiedenen Richtungen (und 3 *anderen* 2-zähligen in den entgegengesetzten Richtungen). Es ist nun eine sehr bemerkenswerthe Thatsache, dass es wirklich polarpyroelektrische Substanzen giebt, die nothwendig der einen, resp. der anderen dieser 2 Abtheilungen zugerechnet werden müssen: *Boracit*, zur geneigt-hemiëdrischen Abtheilung des regulären Systems, Abth. VI, gehörig, besitzt 4 pyroelektrische Axen, jede mit entgegengesetzt elektrischen Polen, es sind die 3-zähligen Axen, die in den Würfeldiagonalen liegen; ebenso verhält sich nach Rose¹⁾ der *Rhodicit*, welcher ebenfalls regulär tetraëdrisch ist; ein analoges Verhalten zeigt auch das regulär tetraëdrische *Fahlerz*; berührt man nämlich die beiden Flächen einer planparallelen Platte, die || einer Tetraëderfläche aus einem Fahlerzkrystall geschnitten ist, mit den Enden eines Galvanometerdrahtes, so beobachtet man — bei Erwärmung der Platte — einen Strom, dessen Richtung von der Spitze zur Basis des Tetraëders geht.²⁾ — *Quarz*, in der trapezoëdrisch-tetartoëdrischen Abtheilung des hexagonalen Systems krystallisirend (Abth. III B), besitzt nach H. Hankels interessanter Entdeckung³⁾ 3 polarpyroelektrische Axen: es sind die 3 Nebenaxen, welche die Mitten der diametral gegenüberliegenden Kanten der Quarzsäule verbinden.

Mit Bezug auf den ersten Fall heisst es in Naumanns Elementen der Mineralogie,⁴⁾ „dass der Boracit gewissermassen hemimorph in der Richtung der trigonalen Zwischenaxen“ sei. In der That wird eine solche Axe am einen Ende von 3 gleichgeneigten Flächen des Tetraëders geschnitten,

1) Riess und Rose: Ueb. d. Pyroelektricität der Mineralien. Pogg. Ann. d. Physik. Bd. 59. p. 353 ff. (1843.)

2) Friedel l. c. pag. 92 u. 93.

3) Hankel: Ueb. d. thermoëlektr. Eigenschaften des Bergkrystalls. 7. Abh. der el. Untersuch. Im 8. Bd. d. Abh. d. math. phys. Classe d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1868. (Auszug in Pogg. Ann. 131. p. 621).

4) Naumann-Zirkel, Elemente der Mineral. 1877. p. 167.

am anderen Ende nur von einer einzigen auf ihr senkrechten Fläche. Und bezüglich des Quarzes erörtert H. Hankel a. a. O. ausführlich, dass derselbe als hemimorph in Richtung der Nebenaxen aufzufassen sei. Letztere zerfallen nämlich wegen des Auftretens der trigonalen Trapezoëder in 2 ungleichwerthige Hälften, indem ein Ende einer Nebenaxe von nur 2 Flächen, das andere Ende von 4 Flächen jenes Trapezoëders geschnitten wird. — Während sich in diesen Fällen die Ungleichwerthigkeit beider Richtungen einer Axe durch die verschiedene Zahl von Flächen derselben Krystallgestalt bethätigt, welche die beiden Enden schneiden, giebt es in denselben beiden Abtheilungen (VI und III B) zahlreiche andere Fälle, wo die beiden Enden der in Rede stehenden Axen zwar auch nicht deckbar sind, jedoch von gleich viel Flächen in analoger Weise geschnitten werden. Dies gilt von der parallelläufig hemiëdrischen Abtheilung des regulären Krystallsystems (Abth. VI) und von der Mehrzahl der Gestalten des rhomboëdrischen Krystallsystems (III B). *In allen solchen Fällen ist auch keine polare Pyroëlektricität nachweisbar gewesen.*¹⁾ Es bestätigt sich also auch bei diesen Abtheilungen, was schon bei II A, III A, IV A, V A gefunden war, dass die Existenz von Axen, die nur nach einer von 2 entgegengesetzten Richtungen verlaufen, allein noch nicht genügt, die Erscheinung der Hemimorphie hervorzurufen. Sucht man nun die gemeinsame geometrische Eigenschaft aller derjenigen Krystalle irgend welcher Krystallsysteme, welche trotz des Vorhandenseins von Axen mit 2 ungleichwerthigen, d. h. nicht deckbaren, Hälften *keine* polare Pyroëlektricität zeigen und daher nicht unter den Begriff hemimorpher Krystalle fallen, so findet man, dass diese Krystalle entweder eine Symmetrieebene senkrecht zur fraglichen Axe besitzen, wobei dann die eine Hälfte des Krystalls das Spiegelbild der anderen ist (hierher Krystalle der Abtheilungen II A, III A, IV A, V A, III B), oder dass wenigstens die eine Hälfte durch Drehung um jene Axe in die Lage des Spiegelbildes zur anderen Hälfte gebracht werden kann (hierher die parallelläufig hemiëdrischen regulären Krystalle der Abth. VI). Das Gemeinsame beider Fälle ist folgendes: Wenn man die

1) Vgl. H. Friedels Untersuchung des Schwefelkieses. l. c. p. 84—91.

nicht deckbaren Axenhälften ineinanderlegt, so wird die Krystallgestalt in zwei Lagen geführt, die zu einander *spiegelbildlich gleich* (symmetrisch) sind in Bezug auf eine durch diese Axe gelegte Symmetrieebene. — Alle übrigen Krystalle mit Axen von 2 ungleichwerthigen Hälften sind polar-pyroelektrisch und können daher als hemimorph aufgefasst werden. Hiernach hätte man statt der an der Spitze dieses § stehenden Definition der Hemimorphie nunmehr folgende:

„Ein Krystall ist hemimorph nach einer Symmetrieaxe, wenn die beiden Axenhälften weder deckbar gleich noch spiegelbildlich gleich sind.“

Gegen diese Erweiterung des Begriffs der Hemimorphie würde nichts einzuwenden sein, wenn nicht durch H. Friedel ein Fall von polarer Pyroelektricität bekannt geworden wäre, wo die entgegengesetzten Pole überhaupt nicht an den Enden einer Symmetrieaxe, sondern an denen einer anderen Linie auftreten. Herr Friedel¹⁾ fand nämlich den in Tetraëdern des quadratischen Systems krystallisirenden Kupferkies polar-elektrisch in der Weise, dass bei Erwärmung ein Strom von einer Seitenfläche des Tetraëders zur gegenüberliegenden Spitze hin fließt. Eine solche Linie ist aber keine Symmetrieaxe; und überhaupt hat die ganze Krystallgestalt keine derartige Symmetrieaxe, nach welcher man sie hemimorph ausgebildet nennen könnte. Auf Grund dieser Thatsache (wenn sie wirklich zweifellos feststeht), erscheint die obige Erweiterung des Begriffs der Hemimorphie als zwecklos, weil nun polare Pyroelektricität doch noch bei anderen als hemimorphen Krystallen vorkommt. Die beiden Fälle des Auftretens polarer Pyroelektricität, nämlich 1) bei hemimorphen, 2) bei geneigtflächig hemiëdrischen Krystallen, lassen sich dann nur dadurch unter einen gemeinschaftlichen geometrischen Gesichtspunkt bringen, dass man erfahrungsgemäss ausspricht: „*Polare Pyroelektricität findet sich nur bei solchen Krystallgestalten, zu deren Begrenzung Flächen ohne ihre Parallelfächen gehören.*“

§ 35. Isomorphie.

Die Thatsache der Isomorphie gewinnt durch die neue Theorie der Krystallstruktur an Verständlichkeit. *Man versteht*

1) l. c. pag. 93 und 94.

bekanntlich unter isomorphen Körpern solche, welche bei analoger chemischer Konstitution gleiche oder nahezu gleiche Krystallform besitzen und ausserdem fähig sind, nach veränderlichen Verhältnissen zusammenzukrystallisiren, wodurch sogenannte isomorphe Mischungen entstehn. Diese letztere Fähigkeit ist sogar das entscheidende Merkmal der Isomorphie zweier Substanzen.¹⁾ Während man früher Analogie der chemischen Konstitution zweier Substanzen nur bei Gleichheit der Atomzahl in der chemischen Molekel annahm, hat man den Begriff später erweitert und findet die Analogie darin, dass eine Gruppe von Atomen durch eine andere vertreten werden kann, die unabhängig von der Atomzahl einen gleichen chemischen Wirkungswerth besitzt. Bei dieser Annahme stellt sich die Gleichheit der Atomzahl nur als ein specieller, allerdings in der Natur am häufigsten verwirklichter Fall der Analogie der Konstitution heraus.²⁾ Zugleich zeigt sich in letzterem Falle das specifische Volumen (d. h. das Verhältniss des specifischen Gewichts zum Aequivalentgewicht) isomorpher Verbindungen als gleich oder annähernd gleich.³⁾

Die Fähigkeit des Zusammenkrystallisirens weist deutlich darauf hin, dass das Wesen der Isomorphie nicht sowohl in einer Aehnlichkeit der äusseren Krystallform zu suchen ist, — welche auch bei keineswegs isomorphen Körpern vorhanden sein kann, z. B. im regulären Krystallsystem — als vielmehr in einer Aehnlichkeit der Struktur, sogar mit möglichster Gleichheit der absoluten Dimensionen; auf letzteres weist die häufige Gleichheit der specifischen Volumina hin. Dies berechtigt zur Aufstellung folgenden Satzes:

„Isomorph sind 2 Substanzen, welche in krystallisirtem Zustande kongruente oder doch nahezu kongruente Strukturformen besitzen (wobei unter Strukturformen die obigen 66 Punktsysteme verstanden sind).“

Berücksichtigt man, dass in den dem regulären Krystallsystem entsprechenden Abtheilungen VI und VII nicht weniger als 13 verschiedene Strukturformen möglich sind, und dass jede derselben, wie in § 32 gezeigt ist, wieder äusserst

1) Vergl. Kopp: Theor. Chemie p. 141 ff. Ferner A. Knop: Anorganographie p. 162. (1876.)

2) Siehe Knop a. a. O. p. 163.

3) Siehe Kopp a. a. O. p. 184.

verschiedene Gestaltungen annehmen kann, so wird es durchaus begreiflich, dass keineswegs alle regulär krystallisirenden Substanzen isomorph zu sein brauchen, trotz des geometrisch nahen Zusammenhanges aller Gestalten dieses Krystallsystems. — Dass auch zwischen Substanzen, die in verschiedenen Krystallsystemen krystallisiren, Isomorphie möglich sei, wird durch die in § 33 angestellten Betrachtungen über Grenzformen wenigstens nicht unwahrscheinlich; freilich ist bisher noch in keinem solchen Falle das Zusammenkrystallisiren nach wechselnden Verhältnissen nachgewiesen.¹⁾

Capitel X.

Physikalische Eigenschaften der Krystalle.

§ 36. Abhängigkeit von der Richtung, Unabhängigkeit vom Ort.²⁾

Die Untersuchung der verschiedensten physikalischen Eigenschaften der Krystalle hat zu einem ganz allgemeinen Erfahrungssatze geführt,³⁾ welcher lautet:

Wenn man die physikalischen Eigenschaften eines Krystalls längs geraden Linien untersucht, welche parallel mit beliebigen fest im Raume gegebenen Richtungen durch irgend einen Punkt des Krystalls gelegt sind, so findet man diese Eigenschaften nur abhängig von den Richtungen der Geraden, aber unabhängig von ihrem Ausgangspunkt. Derselbe Satz lässt sich auch in folgender anderen Art aussprechen: „Im Krystall giebt es unzählig viele Punkte, um deren jeden das physikalische

1) Vergl. Kopp a. a. O. p. 148.

2) Dieser § stimmt vielfach mit einer jüngst von mir veröffentlichten Abhandlung „Zurückweisung eines Einwurfs gegen die neue Theorie der Krystallstruktur“ (Wiedem. Ann. d. Phys. 1879. Bd. 6, pag. 545—552) überein, in welcher ein Angriff des Herrn Prof. de Lapparent: Note sur les théories relatives à la structure cristalline in den Annales de la Société scientifique de Bruxelles. 1878, abgewiesen wird. Die Formulirung der ersteren Sätze habe ich ziemlich unverändert Herrn de Lapparents Abhandlung entlehnt.

3) Hierbei ist Herrn Hankels Auffassung der pyroelektrischen Erscheinungen als isolirt stehende und noch nicht endgültig bewiesene Ansicht unberücksichtigt gelassen.

Verhalten parallel mit beliebigen fest im Raume gegebenen Richtungen dasselbe ist wie um jeden anderen. Der Abstand zweier nächsten solchen Punkte ist unmessbar klein.“ Weil aber das physikalische Verhalten wesentlich von der Massenvertheilung im Krystall abhängen muss, so kann auch folgende Fassung des Satzes als Ausdruck reiner Erfahrungsthatsachen gelten:

„Im Krystall giebt es unzählig viele Punkte, um deren jeden die Massenvertheilung parallel mit beliebigen fest im Raume gegebenen Richtungen dieselbe ist wie um jeden anderen.“

Diese Punkte mögen *homologe Orte* heissen. Dieselben sind, wie die vorstehende Ableitung zeigt, zunächst nur *geometrische* Punkte, während die Frage, ob sie mit Massenkpunkten besetzt sind oder nicht, noch ganz offen gelassen ist. Durch ein Verfahren, übereinstimmend mit jenem, vermittelst dessen die Punktanordnung der nicht mit Deckbewegungsachsen begabten regelmässigen Punktsysteme abgeleitet wurde (§ 8, pag. 63 u. 64), findet man nun, dass die homologen Orte parallelepipedisch angeordnet sind, d. h. dass sie ein Raumgitter bilden.

Mit dieser, aus der Erfahrung hergeleiteten, Folgerung stimmt nun die vorliegende Theorie vollständig überein; denn jedes der 66 regelmässigen Punktsysteme enthält parallelepipedisch angeordnete homologe Orte, wie schon daraus hervorgeht, dass sich unter den Deckbewegungen eines jeden Systems 3 nicht in eine Ebene fallende Deckschiebungen befinden.

Mit diesem einfachen Nachweise der Uebereinstimmung zwischen der Theorie und dem, aus dem physikalischen Gesamtverhalten abgeleiteten, allgemeinen Erfahrungssatze könnte man sich schon zufrieden geben. Indessen gelingt es sogar, ausgehend von jenem Erfahrungssatze, den Ergebnissen der Theorie noch viel näher zu kommen. Zu dem Zwecke fasse man ein solches parallelepipedisches Netz homologer Orte in's Auge und verschiebe es im festgehaltenen Krystall parallel mit sich unendlich wenig: dann sind sämtliche jetzt von ihm besetzte Punkte ebenfalls untereinander homolog, d. h. auch um jeden dieser neuen Punkte ist die Anordnung der Materie eine gleichartige. Weil nun die Ver-

schiebung des ursprünglichen Systems unendlich klein, sonst aber ganz beliebig war, so muss es im Krystall unendlich viele kongruente parallele ineinander stehende Netze von je homologen Orten geben; einzelne dieser Netze werden mit Schwerpunkten von Molekeln besetzt sein, andere nicht. Unter allen diesen Netzen giebt es nun gewisse ausgezeichnete. Nämlich alle Krystalle mit Ausnahme derjenigen des triklinen Systems besitzen Symmetrieachsen, um welche gewisse Drehungen oder Schraubungen ausgeführt werden können, die den (unbegrenzt zu denkenden) krystallinischen Molekularkomplex mit sich selbst wieder zur Deckung bringen. Welchen Punkt einer solchen Symmetrieaxe man nun auch in's Auge fassen mag: jedenfalls verlaufen durch alle zu ihm homologen Punkte parallele gleiche Axen. Ein Netz solcher homologen Punkte, durch welche parallele gleiche Symmetrieachsen verlaufen, soll ein *Hauptnetz* heissen. Jetzt kann man 2 verschiedene Annahmen machen, eine specielle und eine allgemeine. Die specielle Annahme macht Bravais, indem er willkürlich voraussetzt, die Schwerpunkte von Molekeln lägen in den Punkten eines Hauptnetzes; die allgemeine Annahme wird in der vorliegenden Theorie gemacht, indem dies nicht für nothwendig erklärt, sondern zunächst an einem, gegen ein Hauptnetz ganz beliebig gewählten, Orte ein Massenpunkt vorhanden gedacht wird. Genau so wie dieser Massenpunkt zu dem nächsten Punkte des Hauptnetzes liegt, muss ein homologer Massenpunkt bei jedem anderen Punkte des Hauptnetzes liegen, sonst wäre ja die Massenvertheilung um die verschiedenen Punkte des Hauptnetzes keine gleiche. *Diese* Massenpunkte für sich sind also parallelepipedisch angeordnet, und die durch sie ersetzt gedachten Molekeln stehn natürlich untereinander parallel. Aber diese Massenpunkte sind im Allgemeinen keineswegs die einzigen im ganzen Krystall. Führt man nämlich die durch eine Symmetrieaxe geforderten Bewegungen aus (z. B. bei einem Krystall des quadratischen Systems etwa wiederholte Drehungen um 90°), so kommen alle Massenpunkte in neue Lagen, und die durch sie repräsentirten Molekeln stehen zu den vorigen natürlich nicht mehr parallel. *Man erkennt, dass der ganze Krystall aus mehreren (im vorigen Beispiel: 4) ineinander gestellten Bravais'schen Raumgittern besteht.* Denkt man sich jedoch den

Specialfall realisirt, dass der anfänglich gegebene Massenzentrum gerade in einen Punkt eines Hauptnetzes fällt, so fallen diese mehreren Raumgitter in ein einziges zusammen, und man hat die Bravais'sche Anordnung, welche sonach als ein Specialfall der allgemeinen Theorie erscheint. *Hiermit ist die neue Theorie unmittelbar als die allgemeinste denkbare Folgerung aus der Gesammtheit der physikalischen Thatsachen abgeleitet.*

Aus physikalischen Beobachtungen wird man im Allgemeinen keine Entscheidung zwischen der hier vertretenen allgemeinen Theorie und der speciellen Bravais'schen erwarten dürfen. Denn welche Beobachtungen man auch anstellen mag, so kann man es doch nie erreichen, das physikalische Verhalten gerade nur längs einer mathematischen Geraden, die von einem mathematischen Punkt ausgeht, zu studiren, und daraus zu entscheiden, ob das Verhalten längs paralleler Geraden immer das gleiche sei, von welchem mathematischen Punkte aus man die Linien auch ziehn mag. Vielmehr kann man stets nur eine Krystallpartie von merklicher Breite dem Versuche unterwerfen. Wenn man z. B. zum Zweck der Härteuntersuchung eine Krystallfläche mit einer harten Spitze ritzt, so überstreicht man keineswegs eine mathematische Gerade, sondern einen Streifen, dessen Breite immer noch gross gegen die Molekularabstände ist. Ebenso ist ein den Krystall durchdringender Lichtstrahl nicht eine gerade Linie, sondern ein schmaler Cylinder; und analog ist es in allen Fällen. *Was die Erfahrung lehrt, ist immer nur das resultirende Verhalten sehr vieler, äusserst nahe beisammen liegender paralleler Molekularfäden, welche also jedenfalls nicht von einem mathematischen Punkt ausgehn.* Hält man sich diese unzweifelhafte Thatsache gegenwärtig, so begreift man, dass die Beobachtungen im Allgemeinen keine unmittelbare nähere Auskunft über die Lagerung der Theilchen geben können, ausser dass sie den allgemeinen Symmetriecharakter des Krystalls erkennen lassen. Nichtsdestoweniger giebt es gewisse specielle Eigenschaften, z. B. die Drehung der Polarisationsebene in manchen Krystallen, welche doch mit bemerkenswerther Deutlichkeit auf solche Strukturen hinweisen, wie sie nur in der neuen Theorie vorkommen.

§ 37. Eintheilung der physikalischen Eigenschaften
in zwei Gruppen.

Genauere quantitative Vergleichen der Theorie mit den physikalischen Beobachtungen sind bei der mangelnden Kenntniss der den Krystallelementen innewohnenden Kräfte nicht ausführbar. Wenn trotzdem die verschiedenen physikalischen Eigenschaften hier noch der Reihe nach behandelt werden, so geschieht es einestheils, weil dabei auf einzelne bisher schwer verständliche Erscheinungen einiges Licht fällt (z. B. die pyroelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalls, die Drehung der Polarisationssebene in einigen Krystallen), anderentheils aber in der Absicht, eine Eintheilung aller den Krystallen zukommenden physikalischen Eigenschaften als begründet nachzuweisen, auf welche bisher noch kein besonderes Gewicht gelegt worden zu sein scheint. Letztere Eintheilung gründet sich darauf, dass die Abhängigkeit der physikalischen Eigenschaften von der krystallographischen Richtung durchaus nicht für alle Eigenschaften eine gleich unmittelbare ist; vielmehr lassen sich in dieser Beziehung 2 Gruppen von Eigenschaften unterscheiden. Zum Zweck der Charakterisirung dieser Gruppen sind einige Bemerkungen voranzuschicken.

Wenn für irgend eine Eigenschaft (z. B. Härte) in zwei Richtungen a und b im Krystall Gleichheit herrscht, so kann letztere wesentlich oder unwesentlich (singulär) sein. *Die Gleichheit ist wesentlich*, wenn in allen unendlich wenig von a verschiedenen Richtungen sich ebensolche Werthe und in ebensolcher Reihenfolge finden, wie in allen unendlich wenig von b verschiedenen Richtungen. Wenn dies nicht der Fall ist, so ist die Gleichheit *unwesentlich oder singulär*. Unter „Gleichheit“ schlechtweg ist im Folgenden immer wesentliche Gleichheit verstanden. — Ferner sollen unter „*übereinstimmenden krystallographischen Richtungen*“ solche verstanden werden, durch deren Ineinanderlegung die Krystallgestalt in zwei Lagen geführt wird, die sich entweder decken, oder die zu einander symmetrisch sind in Bezug auf eine durch die Zusammenfallsrichtung gelegte Ebene. Der Begriff der *Uebereinstimmung* umfasst hiernach die beiden Begriffe der *Kongruenz* und der *Symmetrie* (Deckungsgleichheit und spiegel-

bildliche Gleichheit). — Mit Benutzung dieser Ausdrücke wird nun die folgende Eintheilung verständlich.

Die Eigenschaften der ersten Gruppe sind dadurch charakterisirt, dass Gleichheit nur in solchen Richtungen herrscht, die auch krystallographisch übereinstimmen; hierher hauptsächlich alle von der Cohäsion abhängigen Eigenschaften.

Bei den Eigenschaften der zweiten Gruppe ist dagegen die Gleichheit nicht durchgängig auf krystallographisch übereinstimmende Richtungen beschränkt; hierher die optischen, thermischen, magnetischen und einige elektrische Eigenschaften.

Beide Gruppen werden jetzt nacheinander besprochen.

§ 38. Erste Gruppe von Eigenschaften.

a) Von der Cohäsion abhängige.

Am auffälligsten bethätigen sich die Cohäsionsunterschiede in krystallographisch verschiedenen Richtungen durch die *Spaltbarkeit* oder die sogenannten *Blätterdurchgänge*. Es ist kein Fall bekannt, dass sich parallel zu krystallographisch ungleichwerthigen Ebenen Spaltungsflächen mit gleicher Leichtigkeit hervorrufen liessen oder übereinstimmende physische Beschaffenheit zeigten. Dasselbe gilt von den versteckteren Blätterdurchgängen, die Herr Reusch¹⁾ entdeckt und mit dem Namen „*Gleitbrüche*“ belegt hat. — Auch vermittelt direkter Messung, nämlich durch Untersuchung der *Zugfestigkeit*,²⁾ die allerdings erst für eine Substanz (Steinsalz) durchgeführt ist, hat sich ergeben, dass die Cohäsion in krystallographisch verschiedenen Richtungen sehr verschiedene Werthe besitzt.

Ausführlichere Untersuchungen liegen über die *Härte* vor. Seit Huygens,³⁾ welcher entdeckte, dass auf der Fläche eines Spaltungsrhomboëders von Kalkspath die kurze Diagonale verschiedene Härte zeigt, je nachdem man sie in der einen oder der anderen Richtung überstreicht, haben beson-

1) Reusch: Pogg. Ann. d. Phys. Bd. 132. p. 441. 1867.

2) Sohncke: Ueber d. Cohäsion des Steinsalzes in krystallographisch verschiedenen Richtungen. Pogg. Ann. 137. p. 177. 1869.

3) Huygens: Traité de la lumière. Leyde. 1690. 4. p. 92–96.

ders Frankenheim,¹⁾ A. Seebeck,²⁾ Franz,³⁾ Grailich und Pekárek,⁴⁾ und neuerdings in sehr eingehender Weise Herr F. Exner⁵⁾ Beobachtungen über die Härte von Krystallflächen angestellt. Während Frankenheim die Härte einfach vermitteltst Ritzens aus freier Hand unter Anwendung verschiedener Metallnadeln untersuchte, bedienten sich die Späteren einer vollkommeneren, zuerst von Seebeck angegebenen Methode, welche es erlaubt, die verschiedenen Härten in Zahlen auszudrücken; sie besteht darin, dass der Druck (in Gewichten) gemessen wird, der auf eine harte Spitze ausgeübt werden muss, damit sie eine unter ihr fortgezogene Krystallplatte in eben noch sichtbarer Weise ritzt. Aber auch diese Methode ist noch keineswegs fein genug, um in allen Fällen sichere Resultate zu liefern. — Das Ergebniss aller dieser Untersuchungen ist, dass die Härte im Allgemeinen verschieden ist nicht nur auf den verschiedenwerthigen Flächen eines Krystalls (sehr auffallend z. B. beim Cyanit), sondern auch in allen krystallographisch nicht übereinstimmenden Richtungen einer und derselben Krystallfläche (z. B. ist auf einer Würfelfläche des Steinsalzes die Härte am grössten parallel der Diagonale, am geringsten parallel der Kante, beim Flussspath ist es gerade umgekehrt). Ja man findet sogar in den beiden Richtungen einer und derselben geraden Linie verschiedene Härte, jedoch nur wenn beide Richtungen krystallographisch nicht übereinstimmende sind (z. B. in jeder Geraden auf einer Oktaederfläche des Flusspaths oder des Steinsalzes, ausser in jenen, die den Dreiecksseiten der Oktaederfläche parallel laufen).

Unter der grossen Zahl verschiedener auf ihre Härte untersuchter Krystalle fanden sich bisher nur folgende Fälle,

1) Frankenheim: De crystallorum cohaesione. Dissert. inaugur. Vratislav. 1829. Deutsch in Baumgärtner u. Ettingshausen Zeitschr. f. Phys. u. Math. Bd. 9. Wien. 1831.

2) A. Seebeck: Ueb. Härteprüfung an Krystallen. Progr. d. Berliner Realgymnasiums. 1833.

3) R. Franz: Ueb. d. Härte der Mineralien. Pogg. Ann. 80. p. 37. 1850.

4) Grailich u. Pekárek: Das Sklerometer u. s. f. In: Sitzungsber. d. Wiener Akad. Bd. 13. p. 410. 1854.

5) F. Exner: Untersuchungen üb. d. Härte an Krystallflächen. Gekrönte Preisschrift. Wien. 1873.

wo krystallographisch nicht übereinstimmende Richtungen nicht auch verschiedene Härte erkennen liessen:

Nach Frankenheim: Bleiglanzwürfel, Spaltungsfläche des Glimmers, gerade Endfläche des Kalkspaths.

Nach Franz: Saphyr, Hauptrhomboëder des Quarz.

Nach Exner: Chlorsaures Natron, unterschwefelsaures Blei, Spaltungsfläche der (rhombisch krystallisirenden) schwefelchromsauren Magnesia.

Bezüglich der scheinbaren Härtegleichheit in allen Richtungen der geraden Endflächen des Kalkspaths sagt Frankenheim selbst (Dissertatio): „verum inde non sequitur differentiam esse nullam“; und in der That fanden Grailich und Pekárek mit ihrer feineren Methode das unzweifelhafte Resultat, dass in dieser Fläche (welche, die Rhomboëderecke abstumpfend, die Gestalt eines gleichseitigen Dreiecks besitzt), ein Härtemaximum in der Richtung der Dreieckshöhe von der Spitze nach der Basis hin vorhanden ist, ein Härteminimum in genau entgegengesetzter Richtung, dagegen mittlere Härte parallel zur Dreiecksseite. In gleicher Weise scheint es, mit Rücksicht auf die geringe Feinheit der bisherigen Methoden, durchaus als das natürlichste, bei den angeführten Ausnahmefällen durchgängig die in krystallographisch verschiedenen Richtungen beobachtete Gleichheit der Härte nur für eine *scheinbare* zu halten, d. h. in Wahrheit Härteunterschiede vorhanden zu denken, jedoch so geringe, dass sie der bisherigen Beobachtung noch nicht zugänglich gewesen sind. Dies ist um so wahrscheinlicher, als Frankenheims Beobachtungen nach einer sehr mangelhaften Methode angestellt sind, und als H. Exners Beobachtungen sich auf Substanzen beziehen, die sehr weich und hygroskopisch sind, wodurch die Erkennung feiner Unterschiede ganz besonders erschwert wird. Dagegen kommt mir die von H. Exner (loco cit. p. 107) aufgestellte Hypothese, „dass die Härtekurve¹⁾ nur abhängе von den Spaltungsebenen des Krystalls und in gar keiner Beziehung zur sonstigen krystallographischen Werthigkeit der Fläche stehe“, wenig wahrscheinlich vor; denn Spaltbarkeit

1) Härtekurve ist diejenige in einer Krystallfläche gezeichnet gedachte Kurve, deren Radiivektoren den in den betreffenden Richtungen beobachteten Härtegraden an Länge proportional sind.

und Härte scheinen mir zwei koordinirte Eigenschaften zu sein, die beide von den Cohäsionskräften abhängen; und wenn ein Krystall durch Abwesenheit deutlicher Spaltbarkeit verräth, dass die Unterschiede seiner Cohäsion in verschiedenen Richtungen sehr gering sind, so ist es völlig begreiflich, dass alsdann auch nur sehr geringe Härteunterschiede vorkommen. Uebrigens ist die Exnersche Hypothese auch wohl nicht so schroff gemeint, wie sie klingt, sondern sie dient mehr, um einen mathematischen Ausdruck zur angenäherten Darstellung der Beobachtungen zu gewinnen; denn an einer späteren Stelle (pag. 156) erklärt H. Exner ausdrücklich: „Wenn die Beobachtungen am chlorsauren Natron und unterschwefelsauren Blei keine anderen als kreisförmige Härtekurven ergaben, so folgt daraus nur, dass die Abweichung derselben von einem Kreise zu gering ist, um durch die bisher angewendeten Mittel der Beobachtung noch wahrgenommen zu werden.“ Nach Allem lässt sich als Beobachtungsergebniss mit sehr grosser Wahrscheinlichkeit der Satz aufstellen: *Härtegleichheit findet nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen Statt.*

Neben die bisher besprochenen ist eine scheinbar fremdartige, jedoch ebenfalls auf der Cohäsion der Theilchen beruhende Eigenschaft zu stellen: *der Widerstand gegen die Auflösung*, aus dessen Verschiedenheit nach verschiedenen Richtungen die *Aetzfiguren* hervorgehn. Wenn ein Krystall in ein geeignetes Lösungsmittel gebracht wird, so beginnt die Lösung gleichzeitig an vielen regellos vertheilten Punkten, an welchen eben die (übrigens unbekannten) Bedingungen für die Auflösung am günstigsten sind. Von diesen Punkten aus schreitet die Auflösung nun mit verschiedener Geschwindigkeit fort; man bemerkt nämlich mehr oder weniger regelmässig begrenzte Vertiefungen, deren Dimensionen zunehmen, je länger das Lösungsmittel wirkt; gleichzeitig beginnt die Lösung auch von neuen Centren aus. Wenn das Lösungsmittel hinreichend langsam wirkt, so dass die Theilchen nicht zu tumultuarisch aus ihrem bisherigen Verbande herausgerissen werden, so zeigen sich die Aetzfiguren geradlinig begrenzt; die Geradlinigkeit wird undeutlicher, wenn das Lösungsmittel heftiger wirkt. Zahlreiche über die Aetzfiguren angestellte Untersuchungen, von welchen besonders die grund-

legenden Arbeiten Leydolt's¹⁾ und die reichen Beobachtungen Herrn H. Baumhauers²⁾ hervorgehoben seien, lehren übereinstimmend folgende Sätze:

„Auf einer Krystallfläche sind alle Aetzfiguren einander ähnlich und stehn parallel; krystallographisch gleichwerthige Flächen haben übereinstimmende, krystallographisch ungleichwerthige Flächen haben verschiedene Aetzfiguren. Die Symmetrie der als Begrenzung der Aetzfiguren auftretenden Vielecke steht im engsten Zusammenhange mit der Symmetrie der betreffenden Krystallfläche.“³⁾

Eine andere, von H. F. Exner⁴⁾ angewandte Methode zur Untersuchung der Löslichkeit besteht darin, einen feinen Strahl des Lösungsmittels senkrecht gegen eine Krystallfläche stossen zu lassen; hierdurch wird eine Lösungsfigur erzeugt, die sich im Wesentlichen als eine Aetzfigur von grösseren Dimensionen, aber etwas minder scharfer Begrenzung herausstellt.⁵⁾ Die obigen allgemeinen Sätze über Aetzfiguren werden auch auf diesem Wege bestätigt, so dass als allgemeines Beobachtungsergebniss ausgesprochen werden kann: *Gleiche Löslichkeit findet sich nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen.*

Die letzte hergehörige, nämlich ebenfalls von den Cohäsionskräften abhängige, Eigenschaft ist die *Elasticität*. Seitdem zuerst F. Savart⁶⁾ festgestellt hat, dass die Krystalle ein völlig anderes elastisches Verhalten zeigen, als wenn sie Körper mit 3 aufeinander senkrechten Hauptelasticitäten wären (wie man auf Grund ihres optischen Verhaltens bisher vermuthet hatte), ist diese Thatsache wiederholt und

1) Leydolt: Ueber eine neue Methode, die Struktur u. Zusammensetzung der Krystalle zu untersuchen (Quarz). In den Sitzungsberichten der Wiener Akademie. Bd. 15. p. 59. 1855. Ferner: Sitzungsberichte d. Wien. Akad. Bd. 19. p. 10. 1856. (Arragonit.)

2) Pogg. Ann. Bd. 138, 139, 140, 142, 145, 150, 151, 153; Wiedem. Ann. Bd. 1. u. Groths Zeitschr. f. Krystallogr.

3) Man vergl. z. B. die schönen, in vergrössertem Massstabe nach der Natur photographirten Aetzfiguren in A. Knops System der Anorganographie. Zu pag. 27 u. 28. 1876.

4) Sitzungsberichte der Wiener Akademie. Bd. 69. Abth. II. p. 1. 1874. Auch in Pogg. Ann. Bd. 153. p. 53.

5) Sohncke: Ueber Aetzfiguren an Steinsalz u. s. f. in Pogg. Ann. Bd. 157. p. 329. 1876.

6) F. Savart: Untersuchung üb. d. Elasticität der (regelmässig) krystallisirten Körper. In Pogg. Ann. Bd. 16. p. 206. 1829.

auf verschiedenen Wegen bestätigt worden. Savarts Methode bestand in der Untersuchung der Klangfiguren, welche sich auf Scheiben hervorrufen lassen, die in verschiedenen Richtungen, aber mit möglichst gleichen Dimensionen, aus ein und demselben Krystall herausgeschnitten sind. Die vorher ausgeführte Untersuchung der Klangfiguren auf Holzscheiben, die einem grossen Stamme, nahe am Rande, entnommen waren, hatte ihn das entsprechende Verhalten eines Körpers kennen gelehrt, der, wenigstens mit grosser Annäherung, als mit 3 aufeinander senkrechten ungleichen Elasticitätsaxen begabt angesehen werden kann. Die Hauptuntersuchung bezog sich auf Bergkrystall, aus welchem 3 Reihenfolgen von Scheiben entnommen wurden: erstlich Scheiben parallel Ebenen, die in verschiedenen Richtungen durch die Hauptaxe gelegt waren, sodann Scheiben parallel Ebenen, die in verschiedenen Richtungen durch eine Pyramidenrandkante gingen, und endlich Scheiben parallel Ebenen, die in verschiedenen Richtungen durch eine solche Gerade gingen, welche in dem Basissechseck 2 weder benachbarte noch diametral gegenüberliegende Ecken verbindet. Die Scheiben der ersten Reihe besitzen unter einander nicht gleiche Eigenschaften (wie es doch bezüglich des Lichts der Fall ist), sondern es zeigen nur je 3 derselben, die unter einander gleiche Winkel bilden, gleiche Elasticität. Bei der zweiten Reihe ist es besonders auffallend, dass die beiden Scheiben, welche der einen und der anderen Pyramidenfläche parallel sind (also auf verschiedenen Seiten der Hauptaxe liegend gleiche Neigung gegen dieselbe haben), ungleiche Klangfiguren und Töne ergeben. Savart zog aus allen Beobachtungen u. A. folgenden Schluss: „Der Bergkrystall kann nicht zu den Körpern mit 3 ungleichen und rechtwinkligen Elasticitätsaxen gezählt werden, noch viel weniger zu denen, deren Theile rings um eine einzige Linie symmetrisch angeordnet sind; denn es treten hier immer in 3 verschiedenen Richtungen dieselben Erscheinungen auf, und es scheint, als beziehe sich hier Alles auf verschiedene Spaltungsrichtungen, auf die Flächen und die Kanten des Grundrhomboëders.“ Entsprechende Beobachtungen, nur nicht so eingehend und zahlreich, jedoch mit demselben Resultat, stellte er an den ebenfalls rhomboëdrischen Spatheisenstein

und Kalkspath an; auch mit dem Gyps beschäftigte er sich vorübergehend. Die letztere Substanz wurde nach derselben Methode von Herrn A. J. Ångström¹⁾ untersucht, jedoch konnten nur Platten parallel der Hauptspaltungsebene angewandt werden; auch am Feldspath wurden minder eingehende Beobachtungen gemacht. Das Resultat war, „dass die monoklinoëdrischen Krystalle in akustischer Hinsicht keine rechtwinkligen Elasticitätsaxen besitzen; denn das Dasein eines solchen Axensystems müsste den verschiedenen Arten von Klangfiguren nothwendig eine übereinstimmende Lage geben“, während die Beobachtung zeigt, dass die Axen der verschiedenen Arten von Klangfiguren keineswegs zusammenfallen.

Wenn durch diese Untersuchungen schon unzweideutig bewiesen war, dass ein Krystall nach seinen verschiedenen Richtungen verschiedene Elasticität besitzt, so fand dies Resultat eine schöne und noch mehr in die Augen springende Bestätigung durch Untersuchung der Biegung von Stäbchen, die in verschiedenen Richtungen aus einem Krystall geschnitten waren. Herr G. Baumgarten²⁾ ermittelte auf diesem Wege die Elasticität des Kalkspaths für 8, um je $22\frac{1}{2}^{\circ}$ von einander abweichende Richtungen eines und desselben Hauptschnitts, der durch die Hauptaxe und eine Rhomboëderendkante gelegt ist. In einem solchen Hauptschnitt findet sich keine Symmetrie gegen die Hauptaxe bezüglich der Elasticität, ebensowenig wie hier krystallographische Symmetrie vorhanden ist; denn 2 Stäbchen, deren Längsrichtungen um gleich viel auf der einen und anderen Seite von der Hauptaxe abweichen, zeigen bei gleichen Dimensionen und gleicher Belastung verschiedene Biegung; und zwar haben Stäbchen parallel der Richtung der Rhomboëderendkante das Biegungsminimum, Stäbchen nach der Richtung der kurzen Rhombendiagonale der Rhomboëderfläche das Biegungsmaximum.

Auf demselben Wege wurde von Herrn W. Voigt³⁾ das regulär krystallisirende Steinsalz untersucht. Für Stäbchen

1) Ueber die Molekularkonstanten der monoklinoëdrischen Krystalle. In Pogg. Ann. 86. p. 206. 1852.

2) Die Elasticität von Kalkspathstäbchen. In Pogg. Ann. Bd. 152. p. 369. (1874.)

3) Bestimmung der Elasticitätskonstanten des Steinsalzes. In Pogg. Ann. Ergbd. VII. p. 1 u. p. 177. 1876.

von 6 verschiedenen Richtungen, nämlich parallel den Normalen der Würfelfläche, Oktaëderfläche, Granatoëderfläche und dreier Pyramidenwürfelflächen, die resp. unter $11\frac{1}{4}^{\circ}$, $22\frac{1}{2}^{\circ}$, $33\frac{3}{4}^{\circ}$ gegen die Würfelfläche geneigt sind, wurde die Biegung ermittelt; sie stellte sich am kleinsten parallel der Würfelflächennormale, am grössten parallel der Oktaëderflächennormale heraus. Trägt man daher vom Centrum eines Steinsalzwürfels aus auf den verschiedenen Richtungen im Krystall Längen auf, proportional den Biegungen, welche die Stäbchen jener Richtungen bei gleichen Dimensionen und gleicher Belastung erleiden, so erhält man eine Oberfläche, welche das Ansehn eines über den Krystallaxen konstruirten Würfels mit abgerundeten Kanten und Ecken, und mit vertieften Seitenmitten darbietet. — Eine weitere Untersuchung des H. W. Voigt über die Torsion von Steinsalzstäbchen, die in verschiedenen Richtungen aus einem Würfel geschnitten sind, hat gelehrt, dass die entsprechende, die Torsionsgrössen darstellende Oberfläche einem über den Krystallaxen konstruirten abgerundeten Oktaëder (jedoch ohne Vertiefung der Seitenmitten) ähnelt. Mithin ist die Torsion derjenigen Stäbchen am geringsten, welche die stärkste Biegung erleiden, und umgekehrt.

Beim Gyps hat Herr L. A. Coromilas¹⁾ für Stäbchen von 17 verschiedenen in der Hauptspaltungsebene liegenden Richtungen die elastische Biegung untersucht und eine unsymmetrische Vertheilung gefunden, so dass die durch Auftragen der Biegungsgrössen in den betreffenden Richtungen erhaltene Kurve durch keine Gerade in zwei spiegelbildlich gleiche Hälften getheilt werden kann. Die von demselben Beobachter mit Glimmer in verschiedenen Richtungen parallel der Spaltungsfläche angestellte Untersuchung zeigt, dass die entsprechende Kurve einem quadratähnlichen Rhombus mit stark gerundeten Ecken und schwach eingedrückten Seiten gleicht.

Endlich sind noch die für Steinsalz gewonnenen Resultate durch Anwendung zweier anderen Methoden bestätigt worden. Nämlich erstlich untersuchte Herr P. Groth²⁾ nach

1) Ueber die Elasticitätsverhältnisse im Gyps u. Glimmer. Inauguraldissert. Tübingen. 1877.

2) Monatsberichte der Berliner Akademie. 1875. p. 544.

einer von Herrn Warburg angegebenen Methode die Schallgeschwindigkeit in Steinsalzstäbchen zweier verschiedenen Richtungen und erlangte dadurch einen Zahlwerth für das Verhältniss der Elasticitätskoefficienten in diesen beiden Richtungen, welcher mit dem von H. Voigt gefundenen gut übereinstimmt. — Und jüngst hat Herr K. R. Koch¹⁾ die Biegung von sehr kurzen Steinsalzstäbchen durch die äusserst empfindliche Methode der Verschiebung von Interferenzstreifen gemessen (von welcher Fizeau so erfolgreiche Anwendung zur Bestimmung der thermischen Ausdehnung gemacht hatte), und wiederum die früheren Resultate bestätigt. Weil diese Methode Stäbchen von nur mässiger Länge (15—20mm) voraussetzt, so lässt sie die Anwendung auf eine grössere Reihe von Krystallen zu; daher sind von ihr noch werthvolle Aufschlüsse über das elastische Verhalten der Krystalle zu erhoffen.

Aus allen bisherigen Untersuchungen über Krystall-elasticität geht unzweifelhaft hervor, *dass Gleichheit der Elasticität nur in übereinstimmenden Richtungen im Krystall stattfindet.* — Somit ist für sämtliche von der Cohäsion abhängige Eigenschaften das Beobachtungsergebniss dies: dass sie zur ersten der oben aufgestellten beiden Gruppen von Eigenschaften gehören, d. h. dass für sie (wesentliche) Gleichheit nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen herrscht.²⁾

Es mag nicht überflüssig sein zu bemerken, dass die Berechtigung der oben eingeführten Unterscheidung von wesentlicher und unwesentlicher (singulärer) Gleichheit einer Eigenschaft in 2 verschiedenen Richtungen jetzt nachträglich besonders einleuchtend wird. In krystallographisch übereinstimmenden Richtungen herrscht nämlich wesentliche

1) Ueb. d. Bestimmung des Elasticitätskoeffic. aus der Biegung kurzer Stäbchen. In Wiedemann Ann. d. Phys. Bd. 5. p. 251. 1878.

2) Hiernach erscheint die von Herrn Groth (Monatsber. d. Berl. Akad. 1875, pag. 544 ff.) gegebene Definition eines Krystalls als „eines homogenen festen Körpers, dessen Elasticität sich mit der Richtung ändert,“ doch als zu eng; denn einerseits ändert sich nicht nur seine Elasticität, sondern die Gesammtheit seiner von der Cohäsion abhängigen Eigenschaften mit der Richtung; und andererseits giebt es noch andere, nicht unter den Begriff des Krystalls fallende, Körper, deren Elasticität sich ebenfalls mit der Richtung ändert, z. B. schnell gekühltes Glas, ferner jeder Körper, der unregelmässig vertheilten Pressungen unterworfen ist, ferner Holz u. s. f.

Gleichheit für alle Cohäsionseigenschaften zugleich, während singuläre Gleichheit bei der einen Cohäsionseigenschaft in diesen, bei der anderen in jenen Richtungen vorkommt.

Betrachtet man das geschilderte mechanische Verhalten der Krystalle im Lichte der vorliegenden Theorie der Krystallstruktur, so muss man freilich zugeben, dass letztere nicht in genauer quantitativer Weise darüber Aufschluss zu geben vermag, weil die Kenntniss des Gesetzes der Molekularkräfte noch fehlt; aber qualitativ ist das besprochene Verhalten auf Grund jener Theorie im Allgemeinen vollkommen begreiflich. *Denn mit wie gearteten Cohäsionskräften man auch die Krystallelemente aufeinander wirkend denken mag: so werden die letzteren — abgesehn von singulären Richtungen — doch nur längs solcher Geraden in übereinstimmender Weise wirken können, um welche herum sie in völlig übereinstimmender Weise angeordnet sind. Es ist folglich nur in krystallographisch übereinstimmenden Richtungen gleiches mechanisches Verhalten möglich.*

Will man ausser der allgemeinen qualitativen Uebereinstimmung von Theorie und Beobachtung irgend welche eingehenderen Vergleiche anstellen, so ist man lediglich auf unsichere Vermuthungen und Analogien angewiesen. Trotz dieser grossen Unsicherheit mag wenigstens zwei solchen Betrachtungen hier noch eine Stelle gegönnt sein; zunächst einer Bemerkung über die *Spaltbarkeit*.

Bei einem Krystall, dessen Struktur ein *Raumgitter* ist, hat es — von rein geometrischem Gesichtspunkte aus — eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass er merkliche Spaltbarkeit parallel jenen 3 Ebenen besitzt, welche das Elementarparallelepiped begrenzen; so heisst dasjenige Parallelepiped, welches die 3 kürzesten Punktabstände zu Kanten hat. (Dieser Gedanke ist von Bravais in seinen *Études cristallographiques* ausführlicher entwickelt; und es hat ja Delafosse auf die Existenz von 3 Blätterdurchgängen seinen Beweis für die Raumgitterstruktur der Krystalle überhaupt gegründet, so dass sein Beweis für diejenigen Krystalle seine Kraft verliert, bei denen Blätterdurchgänge nicht nachweisbar sind.) Weil nun nach der von mir vertretenen Theorie jedem triklinen Krystall Raumgitterstruktur zukommt, so ist für jeden solchen Krystall das Vorhandensein von mehreren deutlichen Blätterdurchgängen vorauszusetzen, während sich für die

übrigen Krystallsysteme auf Grund der Theorie keine solche allgemeine Behauptung aufstellen lässt. In wie weit dieser Schluss durch die Erfahrung bestätigt wird, lehrt folgende Zusammenstellung der Spaltbarkeiten der bekannteren triklinen Krystalle.

Axinit. 4 Spaltbarkeiten, darunter 2 deutliche und 2 unvollkommene.

Albit. 4 Sp.

Mikroclin. 4 Sp.

Kryolith. 4 Sp.

Cyanit. 3 Sp., darunter eine sehr vollkommene und eine wenig vollkommene.

Amblygonit (incl. Montebrasit, Hebronit). 3 Sp., darunter 2 recht vollkommene.

Doppeltchromsaures Kalium. 3 deutliche Sp.; ebenso doppeltchromsaures Silber.

Danburit. 3 Sp., darunter 2 sehr deutliche.

Anorthit. 2 Sp., beide vollkommen.

Rhodonit (incl. Bustamit und Fowlerit). 2 Sp., beide vollkommen.

Babingtonit. 2 Sp., darunter eine sehr vollkommene.

Kupfervitriol. 2 Sp., beide wenig vollkommen; ebenso selensaures Kupfer.

Sassolin. 1 sehr vollkommene Sp. S. gehört aber vielleicht in's monokline System.

Vestan hat sicher Spaltbarkeit, gehört aber vielleicht gar nicht in dies System, sondern zum Quarz.

Von den künstlichen triklinen Salzen ist die Spaltbarkeit meist nicht untersucht.

Wie man bemerkt, sind bei allen sicher in's triklone System gehörigen Krystallen mindestens 2 Spaltbarkeiten nachgewiesen; eine Substanz ohne bemerkbare Spaltbarkeit, wie es deren einige in anderen Systemen giebt, kommt in diesem System nicht vor. Somit findet sich die von vornherein aufgestellte Vermuthung bestätigt.

Eine fernere Bemerkung betrifft die *Löslichkeit*. Die in einer Ebene möglichen unendlichen regelmässigen Punktsysteme¹⁾ lassen häufig eine, natürlich rein geometrisch zu

1) Sohncke: Die regelm. ebenen Punktsyst. v. unbegrenzter Ausdehn. In Borchardts Journ. f. r. u. a. Math. Bd. 77. p. 47 ff. 1873.

verstehende, Zusammenfassung gewisser Punkte zu engeren Gruppen zu. Die hierbei auftretenden Vielecke enthalten nun unter sich alle diejenigen Formen, welche als Umrisse von *Aetzfiguren* beobachtet werden. Weil nun die Aetzfiguren jedenfalls in einem sehr nahen Zusammenhange mit der Struktur stehn, — man kann freilich nicht genauer angeben, in welchem, — so ist diese Uebereinstimmung der Aetzfiguren mit den regelmässigen ebenen Punktsystemen jedenfalls bemerkenswerth, wenn sich auch vorläufig keine weiteren Schlüsse daraus ziehn lassen.

§ 39. Erste Gruppe von Eigenschaften, Fortsetzung.
b) Pyroelektricität.

Ausser den von der Cohäsion abhängenden Eigenschaften ist es noch die Pyroelektricität, welche, wie es scheint, ebenfalls der ersten Gruppe zugerechnet werden muss. Doch gestatten die vorliegenden Beobachtungen allerdings noch keine endgiltige Entscheidung darüber, obwohl unsere Kenntniss von der Pyroelektricität in den letzten Jahrzehnten besonders durch Herrn W. G. Hankels¹⁾ unermüdliche und erfolgreiche Thätigkeit wesentlich erweitert worden ist. Aber die Beobachtungen sind zum grössten Theil an natürlich gegebenen Krystallen angestellt, deren unregelmässige Ausbildung die Resultate nothwendiger Weise stark beeinflusst, so dass die von H. Hankel mitgetheilten Zahlen schon aus diesem Grunde nicht als streng untereinander vergleichbare Messungen anzusehn sind. Das Beobachtungsverfahren besteht darin, den ganzen Krystall, bis auf den kleinen Oberflächentheil, dessen pyroelektrische Spannung während der Abkühlung gemessen werden soll, in Eisenfeilicht oder Platinsand einzubetten und letzteren mit der Erde leitend zu verbinden, darauf das Ganze zu erwärmen, und schliesslich während der Abkühlung

1) Hankel: Elektrische Untersuchungen. In den Abh. d. math.-phys. Classe der Kön. Sächsischen Ges. d. Wiss. Bd. 4 (der gesammten Abh. Bd. 6). 1859. p. 149 Boracit; Bd. 8 (13). 1868. p. 321 Bergkrystall; Bd. 9 (14). 1871. p. 357 Topas; Bd. 10 (15). 1874. p. 271 Schwerspath; p. 343 Arragonit, nebst einer Uebersicht üb. d. Entwicklung der Lehre v. d. Thermoelektricität der Krystalle; Bd. 11 (18). 1878. p. 201 Kalkspath, Beryll, Idokras, Apophyllit; p. 477 Gyps, Diopsid, Orthoklas, Albit, Periklin. Ferner verschiedene Abhh. in Pogg. u. Wiedem. Annal.

dem freien Oberflächentheil das Ende eines zum Elektrometer führenden Drahtes bis auf sehr geringe Entfernung zu nähern. Die verschiedenen Beobachtungen beziehen sich nun nicht auf genau gleiche Temperaturen; namentlich aber ist trotz der Einbettung in das leitende Medium die Einwirkung des übrigen, durch und durch elektrisch erregten, Krystalls auf die angenäherte Spitze sicher noch nicht vollständig ausgeschlossen. Endgiltige Resultate sind wohl erst zu erwarten, wenn der Einfluss der Gestalt dadurch ausgeschlossen wird, dass man aus dem Krystall Kugeln herstellt, und diese auf ihr pyroelektrisches Verhalten untersucht.¹⁾ Die Gesamtheit der bisherigen pyroelektrischen Untersuchungen scheint mir zu folgenden Schlüssen zu berechtigen:

Krystallographisch übereinstimmende Richtungen zeigen gleiches pyroelektrisches Verhalten. Wo z. B. die beiden Hälften einer Symmetrieaxe krystallographisch übereinstimmen, wie es bei der Hauptaxe des rhomboëdrischen Kalkspaths und bei jeder Nebenaxe, ferner bei allen Axen des quadratischen Idokras, des rhombischen Topas, Schwerspath, Arragonit der Fall ist, da zeigen sie auch gleichnamige Elektricität. Ferner verhalten sich die symmetrischen Hälften des monoklinen Gyps pyroelektrisch gleichartig. Auch die 4 gleichwerthigen, trigonalen Axen eines Boracitwürfels zeigen untereinander übereinstimmendes pyroelektrisches Verhalten, während die beiden Hälften einer jeden entgegengesetzt elektrisch sind.

Krystallographisch nicht übereinstimmende Richtungen zeigen

1) Herr Hankel zieht aus seinen Beobachtungen an ringsum ausgebildeten und an zerbrochenen Krystallen den Schluss, „dass dieselben uns zwingen, unsere bisherige Ansicht über das Wesen des Krystalls überhaupt zu modificiren“, weil „die thermoelektrischen Vorgänge auf ringsum ausgebildeten Krystallen andere sind als auf blossen Bruchstücken“, und weil sich „im elektrischen Verhalten der einzelnen Bruchstücke Verschiedenheiten finden, welche von der speciellen Lage derselben im ganzen Krystall abhängen“. Daher sei „der Krystall als ein in sich abgeschlossenes Individuum zu betrachten, bei welchem die einzelnen Theile nicht dem Ganzen und einander gleichen, selbst wenn die äussere Form des Ganzen und der Theile einander vollkommen ähnlich ist“. (Abh. d. Sächs. Ges. d. Wiss. 1874. Bd. 10 (15). pag. 337.) Diese neue Ansicht wird so lange unannehmbar sein, bis ihre Richtigkeit durch Beobachtung an kugelförmigen Stücken, die an verschiedenen Stellen aus ein und demselben Krystall entnommen sind, unwiderleglich bewiesen sein wird.

ungleiches pyroelektrisches Verhalten. Hierfür sprechen folgende Beobachtungen: Bei einem hemimorphen Krystall zeigen die Enden der Axe der Hemimorphie entgegengesetzte elektrische Polarität; ebenso verhält es sich mit jeder trigonalen Axe des Boracitwürfels und mit jeder Nebenaxe des Quarz; bei diesen sämtlichen Axen sind jedesmal die beiden Hälften krystallographisch nicht übereinstimmend (vgl. § 34, pag. 205). Bei Krystallen mit einer Hauptaxe haben die Enden dieser Axe andere Elektricität als die Enden der Nebenaxen, z. B. bei Kalkspath, Beryll, Idokras. Bei Krystallen des rhombischen Systems haben die Enden einer Axe andere Elektricität als die Enden der beiden anderen (und die letzteren beiden unterscheiden sich vielleicht durch die Intensität der elektrischen Erregung?). Dass auch in anderen nicht übereinstimmenden Richtungen als denen der Axen Verschiedenheiten der pyroelektrischen Spannung vorhanden sind, geht aus mancherlei Beobachtungen hervor. So sind verschiedene Stellen einer Würfelfläche des Boracit verschieden stark elektrisch und z. Th. sogar von verschiedenem Vorzeichen. Bei einem gewissen Typus von Schwerspathkrystallen findet man, wenn man dem Umfange eines durch 2 Axen gelegt gedachten Schnittes folgt, „einen 8-fachen Wechsel der Elektricität: während die Kanten an den Enden der Brachy- und ebenso der Makrodiagonale negativ sind, zeigen die zwischen ihnen liegenden Flächen ∞P positive Spannung“.¹⁾ Auch beim Gyps ist die Erregung verschieden stark nach den verschiedenen Richtungen hin.

Aus Allem scheint hervorzugehn, dass die Pyroelektricität wirklich der ersten Gruppe von Eigenschaften zugezählt werden muss. Ueber den ursächlichen Zusammenhang dieser Erscheinung und der Struktur lässt sich nun freilich gar nichts aussagen. Dass indessen ein naher Zusammenhang bestehn muss: das geht aus der wunderbaren Entdeckung hervor, welche H. Hankel am Bergkrystall gemacht hat. Dass jede der 3 Nebenaxen des letzteren an ihren Enden entgegengesetzte elektrische Pole aufweist, wurde schon erwähnt; „dabei fallen die positiven Pole dieser Axen in diejenigen

1) Hankel: Ueb. d. thermoelektrischen Eigenschaften des Schwerspaths. Abh. der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 10 (15). 1874. p. 285.

Seitenkanten des Prismas, welche an ihrem oberen und unteren Ende die Flächen der trigonalen Pyramide tragen, die negativen Pole dagegen in die zwischenliegenden Kanten. Es ziehen sich nun die positiven Zonen von einer oberen Fläche des Gegenrhomboëders über die ihnen zugehörige Seitenkante, in welcher die positiven Pole liegen, nach der nächsten unteren Fläche des Gegenrhomboëders herab, während sich die negativen Zonen von einer oberen Fläche des Hauptrhomboëders über die zu ihnen gehörige Seitenkante, in welcher die negativen Pole liegen, nach der nächsten unteren Fläche des Hauptrhomboëders herab erstrecken. *Die 6 elektrischen Zonen haben also eine schiefe Lage, und diese ist je nach Art des Krystalls verschieden; bei den sogenannten rechten Bergkrystallen gehen diese Zonen von rechts oben nach links unten, bei den linken Krystallen von links oben nach rechts unten.....* Auch wenn die Krystalle nicht ringsum ausgebildet, sondern mit dem unteren Ende angewachsen und zu längeren Prismen ausgebildet sind, ist die zuvor angegebene schiefe Lage der elektrischen Zonen auf den Prismenflächen noch deutlich wahrzunehmen. — Störungen im regelmässigen Verlaufe der Zonen treten ein durch theilweise mangelhafte Ausbildungen und durch Zusammenwachsen rechter und linker Individuen zu einem einfach erscheinenden Krystall.“¹⁾

Diese Beobachtung scheint von hoher Bedeutung zu sein. Indem nämlich die bei den optisch rechts resp. links drehenden Krystallen verschieden liegenden Rhombenflächen und Trapezflächen viel zu klein sind, als dass die entgegengesetzt schiefe Lage der elektrischen Zonen durch die Verschiedenheit der Oberfläche der Krystalle in beiden Fällen erklärt werden könnte, so bleibt nur übrig, sie als eine Folge der verschiedenen inneren Beschaffenheit der Krystalle anzusehn. Nun gehören nach der vorliegenden Krystalltheorie zu den meisten Krystallsystemen, und so auch zum rhomboëdrischen (wohin der Bergkrystall), Punktsysteme mit entweder rechts- oder links-schraubenförmig angeordneten Punkten. Daher liegt es sehr nahe, die erwähnten schiefen elektrischen Zonen,

1) Uebersicht üb. d. Entwicklung d. Lehre v. d. Thermoelektricität der Krystalle. In den Abh. d. math.-phys. Classe d. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 10 (1874). p. 364 u. 365. Ausführlicher in Bd. 8 (1868). p. 380 ff.

deren Mittellinien sich auf einem cylindrisch geschliffenen Bergkrystall in rechts- resp. linksgewundene Schrauben verwandeln müssen, als durch eine entsprechende schraubenförmige Anordnung der Krystallelemente bedingt anzusehn; freilich ohne dass man den Causalzusammenhang anzugeben im Stande wäre. Der hier aus dem pyroelektrischen Verhalten gezogene Schluss auf den schraubenförmigen Bau wird in § 41 eine wesentliche Stütze finden, wo aus der Untersuchung des optischen Drehvermögens des Bergkrystalls sogar die Möglichkeit erwächst, bestimmte schraubenförmige Punktsysteme anzugeben als diejenigen, welche wahrscheinlich die Struktur des rechts- und des linksdrehenden Bergkrystalls darstellen.

Für den nahen Zusammenhang der Pyroelektricität mit der Struktur sprechen ferner die jüngst¹⁾ von H. Hankel mitgetheilten Beobachtungen am hexagonalen Apatit, an welchem bekanntlich Dihexaëder und Säulen dritter Stellung auftreten. Diejenigen Exemplare desselben, welche beim Abkühlen positive Elektricität an den Säulenenden, negative auf den Seitenflächen annehmen (in seltneren Fällen fand nämlich gerade das Gegentheil Statt), zeigten die Maxima der negativen Erregung, d. h. die negativen elektrischen Pole, weder in den Flächenmitten der hexagonalen Säule erster Stellung, noch in denjenigen der Säule zweiter Stellung, sondern in 6 abwechselnden Kanten, welche die Flächen der Säule erster Stellung mit denjenigen der Säule zweiter Stellung bilden, und zwar schienen dies diejenigen Kanten zu sein, an welchen die Flächen der Pyramiden und Prismen dritter Stellung nicht auftreten. Weil nun die Struktur des Apatit vermuthlich eine solche ist, dass die Seiten der regulären Sechsecke der Projektionsfigur nicht parallel laufen zu den Seiten oder Höhen der durch die 6-zähligen Axen bestimmten dreieckigen Maschen, sondern irgendwie gegen letztere gedreht sind, so liegt es nahe, das Wegrücken der pyroelektrischen Pole aus den Flächenmitten oder Kantenmitten der hexagonalen Grundsäule (woselbst sie sich bei anderen hexagonalen Substanzen vorfinden), als bedingt durch jene schiefe Stellung der Sechsecke anzusehn.

1) Wiedemann Ann. d. Phys. Bd. 6. p. 51. 1879.

§ 40. Zweite Gruppe von Eigenschaften.

Jede Eigenschaft dieser Gruppe ist dadurch charakterisiert, dass die Gleichheit nicht durchgängig auf krystallographisch übereinstimmende Richtungen beschränkt ist. Aus diesem Verhalten geht hervor, dass diese Eigenschaften nicht in einer so unmittelbaren Abhängigkeit von der Struktur stehn können, wie die vorigen; daher dürfen sie an dieser Stelle viel kürzer erledigt werden.

Das Verhalten der Krystalle gegen Strahlung, mag letztere nun *optisch* oder *thermisch* untersucht werden, ist für optisch 1-axige zuerst von Huygens, für 2-axige von Fresnel erkannt und jüngst durch H. W. Kohlrausch's Beobachtungen (Doctor-Dissertation) eingehend bestätigt. Es lässt sich am besten mit Hülfe des von Cauchy eingeführten Polarisationsellipsoides übersehen, dessen eigentliche mechanische Bedeutung als „Ellipsoid gleicher Arbeit“ aber erst von Herrn J. Stefan¹⁾ erkannt wurde. Jede Halbaxe dieses Ellipsoides ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der in ihre Richtung fallenden Hauptelastizität des Mediums, welches die Strahlung vermittelt. Legt man nun durch die Mitte des Ellipsoides eine Ebene parallel einer gegebenen Wellenebene, so geben die Hauptaxen der Schnittellipse die beiden Richtungen an, in welchen allein, in einer fortschreitenden Wellenebene, auf die Dauer Schwingungen stattfinden können, d. h. sie geben die Schwingungsrichtungen der beiden polarisirten Strahlen, in die ein einfallender Strahl zerlegt wird; und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebene, in welcher die Schwingungen eine dieser beiden Richtungen haben, ist umgekehrt proportional mit der betreffenden Ellipsenaxe. — Der Erfahrung zufolge ist nun das Ellipsoid gleicher Arbeit für Krystalle des *regulären* Systems eine Kugel, für Krystalle mit einer *Hauptaxe* (quadratisches, rhomboëdrisches, hexagonales System) ein Rotationsellipsoid, dessen Axe mit der Hauptaxe zusammenfällt; für Krystalle des *rhombischen* Systems ein dreiaxiges Ellipsoid, dessen Axen mit den Krystallaxen zusammenfallen; für *monokline* Krystalle ein eben-solches, von welchem eine Axe in die 2-zählige Drehungs-

1) Theorie d. doppelten Brechung. Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 50. II. 1865.

axe fällt; endlich für *trikline* Krystalle ein ebensolches von a priori nicht bestimmbarer Lage. Hiermit ist folgendes ausgedrückt: In regulären Krystallen geht die Strahlung nach sämtlichen Richtungen in ganz gleicher Weise vor sich, es herrscht einfache Brechung und Constanz des Brechungsquotienten: *die Strahlung in regulären Krystallen ist also gänzlich unabhängig von der Richtung!* In Krystallen mit einer Hauptaxe geschieht die Strahlenfortpflanzung und Doppelbrechung in allen solchen Richtungen, welche denselben Winkel mit der Hauptaxe einschliessen, in völlig gleicher Weise, wie gross auch die Verschiedenheiten dieser Richtungen in krystallographischer und mechanischer Beziehung sein mögen. In Krystallen des rhombischen, monoklinen und triklinen Systems findet sich Gleichheit des Verhaltens gegen Strahlung im Allgemeinen in je 8 (paarweise entgegengesetzten) Richtungen, denn das 3-axige Ellipsoid besitzt 3 aufeinander senkrechte Symmetrieebenen, so dass je 8 Vektoren einander gleich sind. Nun kommt den Halbflächern des rhombischen Systems und sämtlichen Krystallen der beiden zuletzt angeführten Systeme keine so hohe Symmetrie zu; somit zeigt sich in diesen Fällen Gleichheit der Strahlung in krystallographisch ungleichen Richtungen, allerdings nur solange man die Vergleichen auf Strahlen von einerlei Wellenlänge beschränkt, denn in den 2 letzten Systemen haben 2, resp. alle 3 Axen des Ellipsoides gleicher Arbeit etwas verschiedene Lage für Strahlen verschiedener Wellenlänge.

Bezüglich der *Absorption* der Strahlen verhalten sich die Krystalle ganz analog wie bezüglich der Polarisation und Brechung; den speciellen Gestalten des Ellipsoides gleicher Arbeit: der Kugel, dem Rotationsellipsoid, dem 3-axigen Ellipsoid, entspricht also resp. ringsherum gleiche Absorption, Dichroismus, Trichroismus.

Auch für die *Reflexion an Krystallflächen* ist jenes Ellipsoid massgebend; *die Reflexion geht nämlich in gleicher Weise vor sich an allen gegen das Ellipsoid gleich gelegenen Flächen, auch wenn dieselben krystallographisch ungleichwerthig sind*; dagegen ist die Reflexion verschieden an Flächen von anderer Lage. Abgesehn von der theoretischen Entwicklung der Reflexion an Krystallflächen, welche zuerst von H. F. Neumann ausgeführt und vor Kurzem von H. Kirchhoff

wesentlich vereinfacht wurde, stützt sich der obige Satz freilich fast nur auf Beobachtungen am Kalkspath. Für diesen fand nämlich A. Seebeck,¹⁾ „dass der Polarisationswinkel (ebenso wie die extraordinäre Brechung) zwar von der Neigung der Fläche gegen die Axe des Krystalls abhängt, nicht aber von ihrer besonderen Lage gegen die Krystallflächen, so dass z. B. die erste und zweite Säule gleiche Resultate geben. Hiernach musste auch die Fläche eines Rhomboëders und seines Gegenrhomboëders gleiche Polarisationswinkel geben.“ In der That gelang es Seebeck, letzteres experimentell zu bestätigen, freilich erst nachdem die grösste Sorgfalt auf das Anschleifen der künstlichen Fläche, mit Kreide als Schleifmittel, verwendet war. Vor Seebeck hatte nur Brewster die Reflexion an der natürlichen Bruchfläche und an einer Fläche eines sehr scharfen Dreiunddreikantners des Kalkspaths untersucht, sowie einige flüchtige Beobachtungen am Rothbleierz angestellt. Nachher hat sich H. F. Neumann experimentell mit diesem Gegenstand beschäftigt und die Uebereinstimmung der Beobachtungen mit seinen theoretischen Formeln nachgewiesen, jedoch mit Beschränkung auf eine einzige Fläche: die natürliche Bruchfläche des Kalkspaths. Auch H. de Sénarmonts²⁾ Beobachtungen am Kalkspath, Quecksilberchlorür, Zinnoxid, Antimonglanz und Eisenglanz bilden keinen directen Beweis für jenen Satz, so wichtig sie in anderer Beziehung auch sind. Trotzdem wird der obige Satz als feststehend gelten können, so dass auch diese Eigenschaft mit Recht zur zweiten Gruppe gestellt ist.

Darauf braucht kaum noch ausdrücklich hingewiesen zu werden, dass die optische Elasticität der Krystalle vollständig verschieden ist von der früher (§ 38) erläuterten gewöhnlichen oder rein mechanischen Elasticität, welche ja zur ersten Eigenschaftsgruppe gehört.

Was das Verhalten der Krystalle gegen die *Wärme* angeht, so ist zunächst ihre *Ausdehnung durch Wärme* völlig bestimmt, sobald man die Hauptausdehnungen kennt, welche

1) Pogg. Ann. 21. p. 290. 1831. Ueb. die Polarisationswinkel am Kalkspath.

2) Pogg. Ann. Erg.bd. II. 1848. p. 513. (Aus Ann. d. Ch. et d. Ph. Sér. III. T. 20.) Ueb. d. Refl. u. Doppelbr. d. Lichts durch metallisch undurchsicht. Kryst.

nach 3 ausgezeichneten, auf einander senkrechten Richtungen (thermischen Axen) stattfinden; eine bei einer bestimmten Temperatur aus einem Krystall hergestellte Kugel verwandelt sich nämlich bei irgend einer anderen Temperatur im Allgemeinen in ein Ellipsoid, dessen Hauptaxen in den thermischen Axen liegen. Dieses *Dilatationsellipsoid* ist bei regulären Krystallen eine Kugel, bei Krystallen mit Hauptaxen ein Rotationsellipsoid, bei den übrigen Krystallen ein 3-axes Ellipsoid; und über die Richtungen seiner Axen gilt dasselbe, was bei dem Ellipsoid gleicher Arbeit gesagt ist, ohne dass jedoch in den 2 letzten Systemen die Axen beider Ellipsoide zusammenzufallen brauchten.¹⁾ Hiernach bleibt ein Krystall des regulären Systems bei jeder Temperatur sich selbst ähnlich: die Ausdehnung ist nach allen Richtungen gleich gross; ein Krystall mit Hauptaxe erfährt gleiche Ausdehnung nach allen solchen Richtungen, die denselben Winkel mit der Hauptaxe bilden, obgleich sie, abgesehen von einigen wenigen, krystallographisch völlig ungleichwerthig sind; ein Krystall des rhombischen, monoklinen oder triklinen Systems zeigt Gleichheit der thermischen Ausdehnung in je 8 (paarweise entgegengesetzten) Richtungen, also bei den 2 letzten Systemen in Richtungen, die nicht alle krystallographisch gleichartig sind.

In gleicher Weise wird die *Wärmeleitungsfähigkeit* der Krystalle im Allgemeinen durch die Radiivektoren eines Ellipsoides (oder doch einer vom Ellipsoid wenig abweichenden Fläche) dargestellt, so dass, für die Erwärmung von einem inneren Punkt aus, diese Fläche die Isotherme vorstellt. Auch hier erscheinen im regulären System und in den Systemen mit Hauptaxe die beiden Specialfälle des Ellipsoides: die Kugel und das Rotationsellipsoid, während bei den Krystallen der übrigen Systeme das dreiaxige Ellipsoid auftritt. Also herrscht auch für diese Eigenschaft vielfach Gleichheit in krystallographisch ungleichen Richtungen. Diese Resultate wurden bekanntlich zuerst von Herrn H. de Sénarmont²⁾ gewonnen, der eine

1) Die ausgedehnteste und genaueste Untersuchung darüber stellte L. Fizeau an; vergl. Pogg. Ann. 128. 1866. Die Ausdehnung starrer Körper durch die Wärme.

2) Ann. d. Ch. et d. Phys. Sér. III. T. 22. p. 179. Vergl. Pogg. Ann. Bd. 73. p. 191. Bd. 74. p. 190. Bd. 75. p. 50. 1848. Ueber die Wärmeleitungsfähigkeit krystallisirter Substanzen.

Fläche einer dünnen Krystallplatte mit Wachs überzogen und die Erwärmung von einem durch ein kleines Loch der Platte gesteckten erhitzten Metallstift ausgehen liess; dann zeichnet sich die Isotherme der Wachsschmelztemperatur durch einen kleinen Wall eben schmelzenden Wachses ab, welcher mit dem Vorrücken dieser Temperatur über die Platte hin vorrückt, also im Allgemeinen eine immer wachsende Ellipse bildet. Eine bedeutende Vervollständigung dieser Untersuchung, aber ohne principiell neues Resultat, gab Herr Ed. Jannettaz,¹⁾ indem er 44 Mineralspecies der Untersuchung unterwarf und bei den meisten das Verhältniss der Axen des Wärmeleitungsellipsoides bestimmte. Eine Verbesserung der Methode wurde von H. Röntgen angegeben.

Bei der Untersuchung der Wärmeleitung einer gewöhnlichen Spaltungslamelle des Gypses machte Herr de Sénarmont noch folgende interessante Beobachtung.²⁾ „Wenn man, statt den Gyps mit Wachs zu überziehen, die Erhitzung bis zu seiner *Entwässerung* treibt, so zeigt der kleine Cylinder von gebranntem Gyps, welcher das Loch umgiebt, ebenfalls eine elliptische Grundfläche von immer derselben Lage.“ Offenbar ist hier die Grenze des entwässerten Gypses als die Isotherme von derjenigen Temperatur aufzufassen, bei welcher der Gyps sein Wasser verliert (d. h. verwittert); die von gebranntem Gyps gebildete Figur ist also nichts anderes als die bei jener höheren Temperatur zu Stande gekommene Wärmeleitungsellipse. Ganz in diesem Sinne fasst auch H. Ångström den Vorgang auf.³⁾ Nun hat Herr C. Pape,⁴⁾ ganz unabhängig von dieser vereinzeltén Sénarmontschen Beobachtung, den Vorgang der *Verwitterung* an einer grösseren Reihe wasserhaltiger Substanzen studirt, deren Verwitterung durch Einbringung in ein hinreichend warmes Luftbad bewirkt wird. Die an vielen unregelmässig vertheilten Stellen

1) Ann. d. Ch. et d. Phys. IV Sér. T. 29. p. 5. S. l. propagation d. l. chaleur dans les corps cristallisés. 1873.

2) Vergl. Pogg. Ann. Bd. 73. p. 191 ff.

3) Vergl. Pogg. Ann. Bd. 86. p. 227. 1852. Ueb. d. Mol.konst. d. monoklin. Krystalle.

4) Ueb. d. Verwitterungsellipsoid wasserhaltiger Krystalle. 1865. Pogg. Ann. Bd. 124. p. 329 und Bd. 125. p. 513. Ueb. d. Verwitt.ellipsoid u. das rechtwinklige Axensystem des Kupfervitriols. 1868. Pogg. Ann. Bd. 133. p. 364.

gleichzeitig beginnende Verwitterung lässt den Krystall mit lauter rundlichen Verwitterungsflecken bedeckt erscheinen. Das Vorrücken der Verwitterung, wenn man sie von einem Punkte des Krystallinnern ausgehend denkt, geschieht nun stets so, dass die Grenze der verwitterten Substanz von einer Oberfläche gebildet wird, die genau oder doch sehr genähert ein Ellipsoid ist. Was im Vorhergehenden über die Specialfälle und die Axenlage der Ellipsoide angegeben wurde, die das optische und thermische Verhalten beherrschen: das bestätigt sich auch hier vollständig. Zwar soll nach Herrn Pape bei den hexagonalen (und rhomboëdrischen) Krystallen das Verwitterungsellipsoid eine Kugel sein; indessen habe ich mich beim unterschwefelsauren Bleioxyd durch Beobachtung der Verwitterungsflecke auf einer zur Hauptaxe parallel angeschliffenen Fläche überzeugt, dass der zur Axe parallele Durchmesser der Verwitterungsfiguren länger als der darauf senkrechte ist (ungefähr im Verhältniss von 11 : 10). Also tritt auch hier das Rotationsellipsoid auf; freilich ist es ein so wenig verlängertes, dass bei Durchschneidung mit einer Ebene von der Lage der gewöhnlichsten Rhomboëderfläche (und diese hat Herr Pape untersucht), die Schnittfigur nicht mehr mit Sicherheit von einem Kreise unterschieden werden kann. — Herr Pape fasst das Vorrücken der Verwitterung als specifisch verschieden von der Wärmeleitung auf und unterstützt seine Ansicht sehr wesentlich durch Beobachtungen am Kupfervitriol, denen zufolge die Wärmeleitungsellipse und Verwitterungsellipse verschieden orientirt sind, so dass z. B. auf einer gewissen Krystallfläche ihre grossen Axen einen Winkel von 21° bilden.¹⁾ Nun verwittert der Kupfervitriol bei $46-50^{\circ}$ C., während die Wärmeleitung durch Schmelzung eines Gemisches von Wachs und Kokusöl von der Schmelztemperatur $52,5^{\circ}$ C. untersucht wurde; folglich lässt sich die verschiedene Orientirung auch nicht dadurch erklären, dass, wie Herr Angström am Gyps nachgewiesen hat,²⁾ die Wärmeleitungsellipsen selbst verschiedene Orientirung haben je nach der Temperatur, bei der sie erzeugt werden. Trotz dieser Schwierigkeit halte ich es nicht für unwahr-

1) C. Pape: Die Wärmeleitung im ein und eingliedrigen Kupfervitriol. 1877. Wiedemann Ann. d. Phys. Bd. I. p. 126.

2) Pogg. Ann. Bd. 86. p. 227. 1852.

scheinlich, dass es gelingen wird, das Verwitterungsellipsoid auf dasjenige der Wärmeleitung zurückzuführen. — Unter allen Umständen aber steht fest, dass Gleichheit der Verwitterung nicht durchgängig nur auf krystallographisch gleichwerthige Richtungen beschränkt ist. Hierdurch stellt sich die Verwitterung sehr bestimmt als ein Vorgang von gänzlich anderer Natur dar als die Auflösung, welche Aetzfiguren erzeugt, und mit welcher man die Verwitterung oft in Parallele gestellt findet. Die Löslichkeit gehört zur ersten Gruppe von Eigenschaften, die Verwitterung zur zweiten.

Aehnlich dem Wärmeleitungsvermögen wird vermuthlich auch das *elektrische Leitungsvermögen* der Krystalle durch die Vektoren eines Ellipsoides dargestellt, welches beim regulären System und bei den Systemen mit Hauptaxe in eine Kugel, resp. in ein Rotationsellipsoid übergeht. Zu dieser Vermuthung berechtigen allerdings bisjetzt nur Versuche über die *oberflächliche* Leitungsfähigkeit der Krystalle, angestellt nach 2 verschiedenen Methoden. Herr G. Wiedemann¹⁾ liess Elektrizität auf eine bestäubte Krystallplatte strömen und sah die Bestäubung verschieden weit zurückweichen. Herr de Sénarmont²⁾ beobachtete die Lichterscheinung, mit welcher Elektrizität in verdünnter Luft von einer auf eine Krystallplatte aufgesetzten Spitze zum kreisförmigen Rande der umgebenden Stanniolbelegung überging. Das übereinstimmende Ergebniss beider Versuchsreihen war, dass auf Flächen regulärer Krystalle und auf solchen Flächen optisch einaxiger Krystalle, die zur Hauptaxe senkrecht liegen, das elektrische Leitungsvermögen rings herum gleich ist, während es auf allen anderen Krystallflächen verschieden ist und zwar durch die Vektoren von ellipsenähnlichen Curven dargestellt wird (letzteres Ergebniss bei H. Sénarmonts Methode weniger hervortretend). — Ueber das innere Leitungsvermögen von Krystallen sind bisher wohl noch keine Resultate bekannt geworden.

Eine andere erst in den letzten Jahren untersuchte elek-

1) Ueb. d. elektrische Verhalten krystallisirter Körper. 1849. Pogg. Ann. Bd. 76. p. 404.

2) Mém. s. l. conductibilité superficielle des corps cristallisés pour l'électricité de tension. 1850. Ann. d. Chim. et d. Phys. Sér. III. T. 28. p. 257.

trische Eigenschaft der Krystalle ist die *diëlektrische Polarisation*. Faraday's Vorstellung, dass in einem schlechten Elektrizitätsleiter (oder Diëlektrikum) unter Einfluss elektrischer Kräfte jede einzelne Molekel polar elektrisch erregt werde und nach Entfernung der äusseren Kräfte in den unelektrischen Zustand zurückkehre, erleidet für Krystalle die Verallgemeinerung, dass diese diëlektrische Polarisation nicht für alle Richtungen, von denen her elektrische Kräfte auf den Krystall wirken, gleich stark ist. Nun gelangt Herr Maxwell in seiner durch Verfolgung der Faradayschen Ideen entsprungenen elektromagnetischen Lichttheorie zu der Folgerung, dass die Quadratwurzel aus der Diëlektricitätskonstante eines Stoffs (letztere noch multiplicirt mit dem Coëfficienten der magnetischen Induktion, der aber kaum von 1 verschieden) gleich dem Lichtbrechungsquotienten desselben ist; folglich muss in einem Krystall die Diëlektricitätskonstante in allen den Richtungen verschieden sein, in denen die Lichtfortpflanzung verschieden ist. Diese Verschiedenheit der diëlektrischen Polarisation für verschiedene Richtungen eines und desselben Krystalls wurde zuerst von Herrn L. Boltzmann¹⁾ am Schwefel nachgewiesen, indem ein zu einer Kugel geschliffener Schwefelkrystall bei verschiedener Aufhängung verschieden stark von einer festen, stets auf dieselbe Weise geladenen, Leiterkugel angezogen wurde. — Von dem störenden Einflusse der elektrischen Leitung, welcher solche Untersuchungen compliciren muss, befreite sich Herr E. Root²⁾ dadurch, dass er den zu untersuchenden Körper mitten zwischen 2 vertikalen, nah gegenüberstehenden kreisförmigen Platten an einem Vertikalfaden aufhängte und die elektrische Ladung dieser Condensatorvorrichtung mit Hülfe eigens konstruirter Commutatoren in sehr schneller Folge (meist 100 bis 200mal sekundlich) umkehrte, ohne ihre absolute Grösse zu ändern. Zuverlässige Resultate wurden mit Quarz, Kalkspath, Arragonit und Schwefel gewonnen, aus welchen Kreisscheiben, Linsen und Kugeln

1) „Ueb. d. Verschiedenheit der Diëlektricitätskonst. des krystallisirten Schwefels nach verschiedenen Richtungen.“ 1874. Sitzungsber. d. Wien. Akad. Bd. 70. p. 342. Im Auszuge in Pogg. Ann. Bd. 153. p. 531.

2) Zur Kenntniss der diëlektrischen Polarisation. 1876. In Pogg. Ann. Bd. 158. p. 1 u. p. 425.

hergestellt waren. Eine Quarzkugel stellt sich mit der optischen Axe genau axial, eine Kalkspathkugel genau äquatorial; wenn aber die optische Axe der letzteren mit der Drehaxe zusammenfällt, hat sie gar kein Drehungsmoment. Eine parallel der optischen Axe geschliffene Kalkspathscheibe, die in einem gewöhnlichen elektrischen Felde horizontal aufgehängt sich vermöge der *Leitung* so stellt, dass die optische Axe axial ist, stellt sich im dielektrischen Felde mit wechselnder Ladung genau äquatorial. Ebenso stellt sich eine Schwefelkugel hier in eine ganz bestimmte Ruhelage, während ihre Lage bei nicht wechselnder Ladung der Platten eine höchst zufällige ist. — Indem die Stärke der dielektrischen Polarisation durch die Dauer der Schwingungen um die betreffende Gleichgewichtslage gemessen wurde, gelangte Herr Root zu dem Ergebniss, dass die Maxwellschen Elektroelasticitätsaxen der Krystalle mit den optischen Elasticitätsaxen nach Richtung und relativer Grösse genau zusammenfallen, dass aber eine absolute Uebereinstimmung von Theorie und Erfahrung nur bei der Annahme erreichbar ist, dass eine vollkommene Leitung überall die Polarisation begleite. Herr Boltzmann hatte keine so grossen Differenzen von Theorie und Beobachtung gefunden. — Soviel geht jedenfalls aus den bisherigen Versuchen hervor, dass die dielektrische Polarisation zur zweiten Gruppe von Eigenschaften gehört, denn sie ist nicht in allen krystallographisch ungleichen Richtungen verschieden (wie u. A. das Beispiel der mit der optischen Axe vertikal gehängten Kalkspathkugel beweist, die sich dann ganz indifferent verhält).

Schliesslich gehört noch das Verhalten der *Krystalle zwischen Magnetpolen* hierher. Während dasselbe nach den Versuchen und Anschauungen der Herren Knoblauch und Tyndall¹⁾ wesentlich von der mehr oder weniger dichten Anordnung der Theilchen abhängt und hiernach wohl zur ersten Gruppe von Eigenschaften gehören würde, so ist der endliche Schluss, zu dem Plücker,²⁾ nach vorgängigen anderen

1) Knoblauch und Tyndall: Ueb. d. Verh. krystallisirter Körper zwischen den Polen eines Magneten. 1850. Pogg. Ann. Bd. 79 p. 233 und Bd. 81 p. 481. Ferner J. Tyndall: Ueb. Diamagnetismus u. magnekrystalinische Wirkung. 1851. Pogg. Ann. 83 p. 384.

2) Phil. Transact. 1858. Bd. 148 part. II.

Erklärungsversuchen, durch seine Experimente gelangte, dieser: dass das fragliche Verhalten ganz analog dem optischen durch ein gewisses Ellipsoid vollkommen bestimmt ist, was übrigens Herr W. Thomson¹⁾ schon 1851 theoretisch abgeleitet hatte. Dieses Ellipsoid ist bei Krystallen mit Hauptaxe ein Rotationsellipsoid, bei regulären Krystallen eine Kugel, bei Krystallen der übrigen Systeme ein dreiaxiges, und zwar fallen beim rhombischen System seine Axen in die Krystallaxen, beim monoklinen liegt eine Axe in der 2-zähligen Drehaxe. Die Beobachtungen lehren nämlich, dass sich in magnetischer, resp. diamagnetischer Beziehung die regulären Krystalle wie unkrystallisirte homogene Körper verhalten, dass ferner die Krystalle mit Hauptaxe nach allen solchen Richtungen gleiches Verhalten zeigen, welche denselben Winkel mit der Hauptaxe bilden, und endlich dass es in allen übrigen Krystallen, entsprechend den 2 optischen Axen, zwei magnetische Linien giebt, die senkrecht auf den Kreisschnitten jenes Ellipsoides stehn und dadurch ausgezeichnet sind, dass ein Krystall, der nur um eine dieser Linien drehbar aufgehängt ist, ringsherum in gleicher Weise von den Magnetpolen beeinflusst wird, d. h. kein Drehungsbestreben zeigt. Aus diesem Gesamtverhalten folgt allerdings, dass diese Eigenschaft der Krystalle zur zweiten Gruppe gehört.

Der Ueberblick über sämtliche in diesem Paragraphen behandelte Eigenschaften lehrt, dass jede von ihnen als Funktion der Richtung genau oder doch nahezu vermittelt der Vektoren eines Ellipsoides (mit den Specialfällen der Kugel und des Rotationsellipsoides) dargestellt wird.²⁾ Hiermit ist ausgesprochen, dass bei jeder dieser Eigenschaften die Gleichheit im Allgemeinen nicht auf krystallographisch übereinstimmende Richtung beschränkt ist, und dass folglich alle diese Eigenschaften mit Recht zur zweiten Gruppe ge-

1) Phil. Magaz. IV. Ser. vol. I. p. 177.

2) Die Krystalle des regulären Systems verhalten sich, wie man bemerkt, bezüglich sämtlicher Eigenschaften der zweiten Gruppe genau so wie isotrope Körper. Daher findet man sie jetzt oft als „isotrope Krystalle“ bezeichnet. Dieser Sprachgebrauch ist nicht zu billigen, denn bezüglich sämtlicher Eigenschaften der ersten Gruppe verhalten sie sich keineswegs wie isotrope Körper.

stellt sind. Ob diese den Eigenschaften der zweiten Gruppe eigenthümliche lockrere Beziehung zur Struktur, wie Savart vermuthete, dahin zu deuten ist, dass diese Eigenschaften unmittelbar durch die Beschaffenheit der einzelnen Molekeln bedingt sind, oder ob man zu dem Medium des Aethers seine Zuflucht nehmen muss, dessen Dichtigkeit oder Elasticität durch die Massentheilchen verhältnissmässig nur in geringem Grade beeinflusst zu denken sind: das zu entscheiden ist man beim jetzigen Zustande der Kenntnisse nicht in der Lage. — Wenn es nun schon bei den Eigenschaften der ersten Gruppe nicht ausführbar war, die Thatsachen zahlenmässig mit der Theorie zu vergleichen, so ist eine solche Vergleichung für die hier vorliegenden Eigenschaften, die so viel lockerer an die Struktur gebunden erscheinen, noch weniger durchführbar; man muss sich vielmehr darauf beschränken, zu konstatiren, dass in solchen Richtungen, für welche die Theorie eine übereinstimmende Anordnung der Krystallelemente angiebt, d. h. welche krystallographisch übereinstimmen, auch stets Gleichheit des physikalischen Verhaltens herrscht; und ferner, dass keine einzige Thatsache mit der Theorie in Widerspruch steht.

§ 41. Zweite Gruppe von Eigenschaften, Fortsetzung.

Das optische Drehvermögen von Krystallen.

Zu den Eigenschaften der zweiten Gruppe gehört auch eine, nur bei verhältnissmässig wenigen krystallisirten Substanzen auftretende Erscheinung, für welche es jedoch gelingt, einen unmittelbaren Zusammenhang mit der Struktur nicht nur im Allgemeinen nachzuweisen, sondern denselben sogar soweit zu verfolgen, dass sich ganz bestimmte Punktsysteme als die Strukturformen jener Krystalle — wenigstens mit grosser Wahrscheinlichkeit — angeben lassen; diese Erscheinung ist die Drehung der Polarisationsebene eines durchgehenden Strahls. Von jedem der mit dieser Eigenschaft begabten Stoffe giebt es 2 Varietäten, welche die Drehung in gleicher Stärke, aber mit gerade entgegengesetztem Drehungssinn zeigen. Seit J. Herschel am Bergkrystall nachwies, dass sich die rechts und die links drehenden Exemplare durch das Auftreten der einen oder der anderen Art von trigonalen Trapezoëdern in

ganz bestimmter Weise unterscheiden, hat man entsprechende krystallographische Unterschiede auch bei allen übrigen optisch drehenden Substanzen nachweisen können, wenn auch die unterscheidenden Flächen nicht immer bei allen Exemplaren ausgebildet sind. Die Formen der rechts und der links drehenden Varietät stellen sich als *enantiomorph* heraus, d. h. sie sind einander genau entsprechend, aber symmetrisch wie Objekt und Spiegelbild, ohne deckbar zu sein. Dass diese Enantiomorphie der äusseren Form auf einer Enantiomorphie der Struktur beruht, ist dadurch unzweifelhaft erwiesen, dass die auf den Flächen solcher Krystalle hervorgerufenen Aetzfiguren ebendenselben Gegensatz darbieten. (Vergl. die Untersuchungen von Leydolt und Baumhauer.) Das Vorkommen enantiomorpher Gebilde bietet für die vorliegende Theorie nicht nur keine Schwierigkeit, sondern es dient derselben geradezu als eine Bestätigung; denn wie man im regulären Krystallsystem und in den mit Hauptaxe begabten Krystallsystemen optisch rechts und links drehende Krystalle kennt, welche paarweise enantiomorph sind, so enthalten alle jenen Krystallsystemen entsprechenden Abtheilungen des § 27 (VI, VII, III, IV, V) solche Punktsysteme, die einander als enantiomorphe Gebilde paarweise zugeordnet sind: hierher gehören vor Allem die rechten und linken Schraubensysteme, ausserdem aber auch solche Gebilde, wie das rhombische Sphenoid (gleichflächige Tetraëder) der Abtheilung II B, der 12-punktner und 24-punktner der Abtheilungen VI und VII, und andere, welche sämmtlich entweder als die eine oder als die andere von 2 enantiomorphen Varietäten vorkommen.

Es darf indessen nicht unbemerkt bleiben, dass die Enantiomorphie zwar eine nothwendige, aber nicht die einzige Bedingung für das Vorhandensein des optischen Drehvermögens von Krystallen ist, denn man kennt Krystalle, die, trotzdem dass sie die Bedingung der Enantiomorphie erfüllen, die Polarisationssebene doch nicht drehen. Hierher gehören alle Krystalle mit rhombischen Sphenoiden; denn von so krystallisirenden Stoffen drehn nur die Lösungen, während die Krystalle selbst sich in optischer Beziehung durch nichts von anderen optisch 2-axigen Krystallen unterscheiden. Hierher gehören ferner (nach mündlichen Mittheilungen des Herrn L. Wulff in Karlsruhe) die in enantiomorphen Formen des

regulären Systems auftretenden isomorphen salpetersauren Salze des Blei, Baryum, Strontium, welche weder im festen noch im gelösten Zustande optisch aktiv sind.

Obgleich sonach die Enantiomorphie nicht als Ursache des optischen Drehvermögens von Krystallen angesehen werden darf, so ist man mit Hülfe der vorliegenden Krystalltheorie doch im Stande, den zureichenden Grund für dasselbe anzugeben und zugleich zu zeigen, *dass solche Krystalle enantiomorph sein müssen*. Der Weg, auf welchem dies gelingt, ist aber nicht der von Fresnel angebahnte. Fresnel führte bekanntlich die Erscheinung darauf zurück, dass ein geradlinig poralisirter Strahl sich im Innern eines drehenden Krystalls in 2 entgegengesetzt cirkulare Strahlen zerlege, welche mit ungleicher Geschwindigkeit fortschreiten. Nun könnte man etwa annehmen, diese Zerlegung entspreche den in einigen Punktsystemen gleichzeitig nebeneinander vorhandenen rechten und linken Schrauben von verschiedener Windungsweite (vergl. z. B. die Gegenschraubensysteme IV 28 und 34); aber diese Vermuthung ist doch höchst gewagt und unsicher. Fresnel selbst konnte für jene Zerlegung keinen Grund angeben, doch vermuthete er, die Aethermoleküle seien im Quarz in Schrauben angeordnet, deren Axen parallel der optischen Axe seien. Indessen zeigt sich diese Annahme nach Herrn Ch. Briots¹⁾ Rechnung unvermögend zur Erklärung der Drehung der Polarisationssebene, indem die einfache Torsion in einer Schraubenlinie keinerlei Wirkung auf die der Schraubenaxe parallelen Strahlen ausübt. Es folgt hieraus, dass die Dissymmetrie des Aethers in den drehenden Krystallen eine complicirtere sein muss. Weil nun die Rechnung lehrte, dass sich ein zur Axe der Aetherschrauben senkrechter Strahl in zwei entgegengesetzt rotirende elliptische Strahlen von verschiedener Geschwindigkeit theilen muss, so machte Herr Briot die Annahme, im Quarz sei der Aether nach Schrauben von durchweg gleichem Drehungssinn, aber verschiedener Richtung geordnet, nämlich so dass die Schraubenaxen mit den Radien der sechsseitigen Basis des Quarz-

1) Versuche über die math. Theorie des Lichts. Deutsch von Klinkerfues. 1867 (Original 1863). Buch IV. Cap. 3. Siehe auch die Vorrede p. XVIII—XXI.

prismas der Reihe nach zusammenfallen. Wenn nun auch die hierbei sich ergebenden Formeln die Erscheinungen des Quarz im Wesentlichen darstellen, so erscheint diese Theorie doch wenig naturgemäss, denn keine geometrische Eigenschaft der Quarzkrystalle weist auf eine Anordnung der Theilchen nach Schrauben von der hier geforderten Lage hin; vielmehr verrathen die Trapezflächen deutlich eine Struktur nach Schrauben, deren Axen in der Hauptaxenrichtung liegen.

Der Schlüssel zum Verständniss der Erscheinung ist vielmehr gegeben durch folgende merkwürdige Entdeckung des Herrn v. Reusch.¹⁾ Wenn man eine grössere Anzahl (12—36) Blättchen zweiaxigen Glimmers von möglichst gleicher, sehr geringer Dicke so aufeinander schichtet, dass die (zur Fläche der Blättchen etwa senkrecht stehende) optische Axenebene jedes neu hinzugefügten Blättchens gegen die des darunter liegenden um 120 Grad im Uhrzeigersinn gedreht ist, so dreht diese *Glimmerkombination* die Polarisationssebene eines senkrecht hindurchgehenden Strahls ebenfalls im Uhrzeigersinn; mit anderen Worten: sie verhält sich im Polarisationsapparat ähnlich wie eine senkrecht zur Axe geschnittene Platte *rechtsdrehenden* Quarzes. Hat man in entgegengesetztem Drehungssinn aufgeschichtet, so ist die Kombination *linksdrehend*. Die Analogie mit dem Verhalten des Quarzes ist so gross, dass man z. B. mit 2 entgegengesetzt drehenden Glimmerkombinationen von übrigens gleicher Beschaffenheit die Airyschen Spiralen eben so schön erhält wie mit 2 entgegengesetzten Quarzplatten. Bei Drehung des Präparats um den hindurchgehenden Strahl als Axe bemerkte Herr v. Reusch gewisse kleine Aenderungen der Farbenerscheinung, doch vermuthete er, dass sich das Verhalten der Glimmerkombination dem des Quarzes um so mehr nähern werde, je dünner die Lamellen und je grösser ihre Anzahl. Auf Grund solcher Beobachtungen hat schon Herr Josiah P. Cooke, Jr.²⁾ die

1) Monatsber. d. K. Akad. d. Wissensch. Berlin. Gesammtsitzung 8. Juli 1869: „Ueber Glimmerkombinationen“. Seite 530. Auch in Pogg. Ann. Bd. 138. Seite 628.

2) The Vermiculites, together with a discussion of the cause of the variation of the optical angle of the micas. In den Proceedings of th. Amer. Acad. of arts and sciences. Cambridge Massachusetts. 1874.

Meinung ausgesprochen, dass die optischen Erscheinungen des Quarzes durch eine analoge Molekularstruktur erzeugt würden, ohne indessen einen zwingenden Beweis dafür beizubringen. Schon früher ist eine ähnliche Ansicht von Herrn G. Hinrichs¹⁾ ausgesprochen, doch erscheint dieselbe noch willkürlicher und unbewiesener.

Es ist mir nun gelungen, das optische Drehvermögen von Krystallen in — wie mir scheint — überzeugender Weise als bedingt durch ihre der Glimmerkombination analoge Struktur nachzuweisen,²⁾ indem ich die Erscheinungen, welche vielblättrige Glimmerkombinationen und auch solche von nur 3 Blättern (Triaden) in parallelem Lichte darbieten, eingehend untersuchte, und namentlich diejenigen Veränderungen der Erscheinung verfolgte, welche bei Anwendung von dünneren und dünneren Blättchen eintreten. Die Erscheinungen, welche eine Triade bei senkrechtem Durchgang eines ursprünglich geradlinig polarisirten parallelen Strahlenbündels darbietet, lassen sich theoretisch auf Grund der Undulationstheorie vollständig verfolgen, indem nur die Thatsache zu Grunde gelegt wird, dass sich in einem Glimmerblättchen ein senkrecht auffallender Strahl in 2 senkrecht aufeinander polarisirte, in derselben Linie bleibende, aber verschieden schnell fortschreitende Strahlen zerlegt. Im Allgemeinen tritt dann aus der Triade ein elliptisch polarisirter Strahl aus; und der Winkel, welchen die grosse Axe seiner Schwingungsellipse mit der Schwingungsrichtung des ursprünglichen Strahls bildet, muss in diesem Falle als die „Drehung der Polarisationsebene“ aufgefasst werden. Die Erscheinung zeigt sich im Allgemeinen noch abhängig vom Azimuth, d. h. von dem Winkel, den die Polarisationsebene des einfallenden Strahls mit der optischen Axenebene des erstgetroffenen Blättchens bildet. Die wesentlichsten hergehörigen Resultate, die ich auf experimentellem und theoretischem Wege überein-

1) Ueb. den Bau des Quarzes. In den Sitzungsber. d. Wien. Akad. 1870. Bd. 61. Abth. I. Seite 83—88.

2) Mathem. Annalen von Clebsch-Neumann. Bd. IX. S. 504—529. 1876: Zur Theorie des optischen Drehvermögens von Krystallen. Ferner: Pogg. Ann. Ergänzungsband VIII. 1878. Seite 16—64. Die Glimmerkombination von Reusch und das optische Drehvermögen von Krystallen.

stimmend erhielt, sind folgende¹⁾: (dabei bedeutet d die Blättchendicke, T die Undulationsdauer der angewandten Lichtart, o und e die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden Wellenebenen, welche aus einer einfallenden Wellenebene entspringen):

1) Je dünner die Blättchen einer *Triade*, um so mehr gestreckt elliptisch schwingt der austretende Strahl bei allen Azimuthen. Schon wenn die Blättchendicke eine solche ist, dass die dritte Potenz der Grösse $s^2 = \sin^2 \frac{d\pi}{T} \left(\frac{1}{o} - \frac{1}{e} \right)$ gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist der austretende Strahl nicht mehr merklich von einem geradlinig polarisirten verschieden. Ebenso tritt aus einer *mehrblättrigen* Glimmerkombination, wie sie durch parallele Aufschichtung von irgend wie viel Triaden von so geringer Blättchendicke entsteht, ein merklich nur geradlinig polarisirter Strahl aus.

2) Je dünner die Blättchen einer Triade, um so weniger ist die Drehung der Polarisationssebene vom Azimuth abhängig. Sind die Blättchen so dünn, dass das Quadrat der Grösse s^2 gegen 1 vernachlässigt werden kann, so ist die Drehung unabhängig vom Azimuth. *In diesem Falle ist die durch parallele Aufschichtung von n kongruenten Triaden bewirkte Drehung n mal so gross als die der einzelnen Triade, also proportional mit der Triadenzahl, also auch proportional mit der Dicke des Präparats.* Für eine sehr dünnblättrige Triade ist die Drehung sehr klein; aber durch hinreichend vervielfältigte Aufschichtung von Triaden kann natürlich eine beliebig grosse Drehung hervorgerufen werden.

3) Die Drehung in Kombinationen von 3 oder mehr Blättchen ist abhängig von der Wellenlänge λ . *Diese Abhängigkeit lässt sich mit grosser Annäherung durch die von Herrn Boltzmann verbesserte Biotsche Formel der Drehung φ im Quarz: $\varphi = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4}$ darstellen* (natürlich mit anderen Zahlenwerthen der Konstanten a und b), und zwar um so treffender, je dünner die Blättchen.

4) Je mehr die Richtung der Strahlen von der Norma-

1) Pogg. Ann. Ergbd. VIII. Seite 59 u. 60.

len auf den Blättchen abweicht, um so mehr verliert sich die Erscheinung der Drehung.

Aus diesen Thatsachen folgt, dass man bei fortgesetzter Verminderung der Blättchendicke zu Kombinationen gelangen muss, deren Drehwirkung mit derjenigen des Quarzes und anderer drehender Krystalle qualitativ völlig übereinstimmt.

Wenn schon aus diesem Ergebniss der Induktionsschluss völlig gerechtfertigt erscheint, dass die Struktur des Quarzes und anderer drehender Krystalle dem Bau jener Glimmerkombination analog sei, so gewinnt dieser Schluss dadurch noch ganz wesentlich an Wahrscheinlichkeit, dass unter den regelmässigen Punktsystemen wirklich nicht wenige enthalten sind, welche eine vollkommen analoge Punktanordnung darbieten, wie die Glimmerkombination: es sind vor Allem die *Schraubensysteme mit 2-zähligen Queraxen* (Nr. 19, 20; 23, 24; 32, 33; 38, 39; 48, 49; 57, 58; 65, 66 des § 27), wie jetzt am Beispiele des rechten, resp. linken, zusammengesetzten 3-punktschraubensystems (Taf. II. Fig. 19) erläutert werden soll. Statt dieses System als aus parallel stehenden zusammengesetzten 3-punktschrauben gebildet aufzufassen, betrachte man es aus einem anderen Gesichtspunkt. Eine durch einen Punkt des Systems gelegte Hauptebene (senkrecht zur 3-zähligen Axe) ist besetzt mit einem Punktnetz von gleichseitig 3-eckigen Maschen; eine solche Ebene heisse eine Molekularebene. Führt man um eine zu dieser Ebene nächstbenachbarte 2-zählige Queraxe, welche 2 nächste 3-zählige Axen schneidet, die betreffende Drehung um 180° aus, so gelangt jene Molekularebene in eine neue Lage, parallel zur vorigen, und 2 solche Punkte, die bezüglich der einen und der anderen Ebene angehören und einander so nah als möglich stehn, bilden eins der früher betrachteten Punktpaare. Das Molekularebenenpaar (in der Figur durch alle gleich tief schattirten Kreise dargestellt) besitzt nun vollkommen den geometrischen Charakter eines monoklinen Krystalls, denn für einen solchen ist ja ebenfalls das Vorhandensein 2-zähliger Drehaxen von einer einzigen Richtung charakteristisch.

Ertheilt man jetzt dem Molekularebenenpaar eine Schraubung mit einer Drehungskomponente von 120° um eine 3-zählige Hauptaxe, — sei es im Uhrzeigersinn, sei es entgegengesetzt, — und wiederholt diese Schraubungen in

demselben Sinne beliebig oft, so ist damit das ganze Punktsystem konstruiert; man erkennt aber auf diese Art, dass es sich ansehen lässt als aus lauter kongruenten Molekularebenenpaaren aufgeschichtet, deren jedes gegen das vorhergehende um 120^0 um eine auf ihnen senkrechte Axe gedreht ist. Indem nun das einzelne Molekularebenenpaar, wie erwähnt, den geometrischen Charakter eines monoklinen Krystallblättchens besitzt, ist es völlig analog einem optisch 2-axigen Glimmerblättchen; also stellt sich eine vollständige Analogie dieses Punktsystems mit einer aus äusserst dünnen Blättchen hergestellten Glimmerkombination heraus. Indem sich nun solche zusammengesetzte Schraubensysteme in allen denjenigen Krystallsystemen vorfinden, in welchen man bisher optisch drehende Krystalle nachgewiesen hat (im regulären Krystallsystem gehören die Punktsysteme 65 und 66 genau hierher; aber auch die Systeme 57 und 58 haben wenigstens ähnlichen Charakter), so erscheint die Ansicht völlig gerechtfertigt, dass als Ursache des Drehvermögens von Krystallen jene Schraubenstruktur anzusehen sei. Es sind also nicht die von Fresnel geahnten einfachen Schrauben, sondern zusammengesetzte, welche der Quarzerscheinung zu Grunde liegen. Der hiermit aufgedeckte Zusammenhang des optischen Drehvermögens mit einer Schraubenstruktur scheint besonders geeignet, die ganze vorgetragene Theorie der Krystallstruktur zu bestätigen.

Wenn ein drehender Krystall in Lösung geht, so ist es nicht undenkbar, dass der Zerfall in einzelne Molekeln nicht vollständig stattfindet, sondern dass noch grössere Molekelkomplexe oder Krystallbruchstücke übrig bleiben, die dann als Ursache des Drehvermögens der Lösung anzusehen wären. So könnte es sich z. B. vielleicht beim schwefelsauren Strychnin verhalten, welches allein unter allen bisher untersuchten Körpern sowohl im krystallisirten als im gelösten Zustande dreht. Für diejenigen Substanzen jedoch, welche nur in Lösung drehen, wird man wohl mit Herrn J. H. van 't Hoff ¹⁾ die Ursache der Drehung unmittelbar in der Struktur der chemischen Molekel suchen müssen, deren Gestalt in solchen

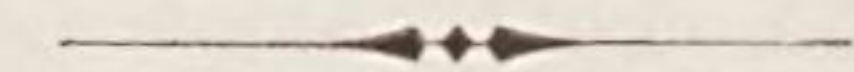
1) La chimie dans l'espace. Deutsch von F. Herrmann: Die Lagerung der Atome im Raume. Braunschweig 1877.

Fällen aus chemischen Gründen als ein unregelmässiges Tetraëder (in speciellen Fällen wohl auch als ein gleichflächiges, d. h. als rhombisches Sphenoid) vorauszusetzen ist. Zu jedem solchen giebt es nämlich ein enantiomorphes Tetraëder. Wenn beim Krystallisiren solche Formen zusammentreten, so können sie etwa ein System wie Nr. 5, 7, 8 oder 10 (§ 27) bilden; demselben wird dann zwar noch der betreffende rechte resp. linke Charakter innewohnen; das Aufhören der Drehung lässt sich aber vielleicht so verstehen: Die Struktur ist jetzt nicht diejenige einer zusammengesetzten Schraube, und die Drehung des einzelnen rhombischen Sphenoides ist etwa dadurch vernichtet zu denken, dass die einander zugewandten Punktpaare zweier benachbarter Sphenoides selbst ein rhombisches Sphenoid, jedoch von entgegengesetztem Drehungssinn, bilden. Entsprechendes würde von zusammentretenden 12-punkttern oder 24-punkttern gelten. — Möglicherweise ist, wie hier nebenbei bemerkt sei, die Entgegengesetztheit der zu Grunde liegenden 12-punktter auch die Ursache für das entgegengesetzte thermoëlektrische Verhalten verschiedener Exemplare von Schwefelkies, und ebenso von Kobaltglanz, Speiskobalt und Chloanthit, welches von den Herren Hankel, Marbach Friedel, Gust. Rose und Groth studirt worden ist.

§ 42. Schluss.

Die im Vorstehenden entwickelte, mit der Erfahrung gut übereinstimmende Theorie ist ihrer Natur nach, wie schon mehrfach hervorgehoben wurde, eine rein geometrische, keine mechanische; sie dringt also nicht bis zu den eigentlichen Ursachen vor. Welche von den regelmässigen Punktsystemen statisch möglich sind, ist ganz unentschieden geblieben. Als nächste Aufgabe bietet sich daher folgende dar: „Für jedes der regelmässigen Punktsysteme zu untersuchen, was für Eigenschaften und Kräfte das, bisher durch einen Punkt ersetzte, Krystallelement besitzen muss, damit es mit seinesgleichen gerade zu jener bestimmten Strukturform zusammentritt;“ mit anderen Worten: „Es muss die Abhängigkeit der Krystallstruktur von der Beschaffenheit der Molekel ermittelt werden“. Wenn wir nun auch sehr weit davon entfernt sind, über diese Kardinalfrage schon irgend etwas zu wissen, so

scheint doch ihre Beantwortung mit Hülfe dieser geometrischen Theorie einigermaßen in das Bereich der Möglichkeit gerückt. Hat man nämlich für einen krystallisirenden Stoff, auf Grund seiner geometrischen und physikalischen Eigenschaften, unter allen möglichen Strukturformen diejenige ermittelt, welche ihm wahrscheinlich zukommt, und kennt man andererseits die chemische Zusammensetzung seiner Molekel, so kann es vielleicht gelingen, einen Zusammenhang zwischen dem Bau der Molekel und der Strukturform zu entdecken. So eröffnet diese Theorie die Aussicht auf eine, wenn auch wohl noch ferne, Beantwortung der interessantesten wissenschaftlichen Fragen.



Berichtigung.

In Fig. 19 auf Seite 73 sollen die 3 links stehenden, durch kleine Kreise resp. ein Kreuz bezeichneten Orte sich genau in denselben Horizontalreihen wie die Orte des rechten Theils der Figur befinden.

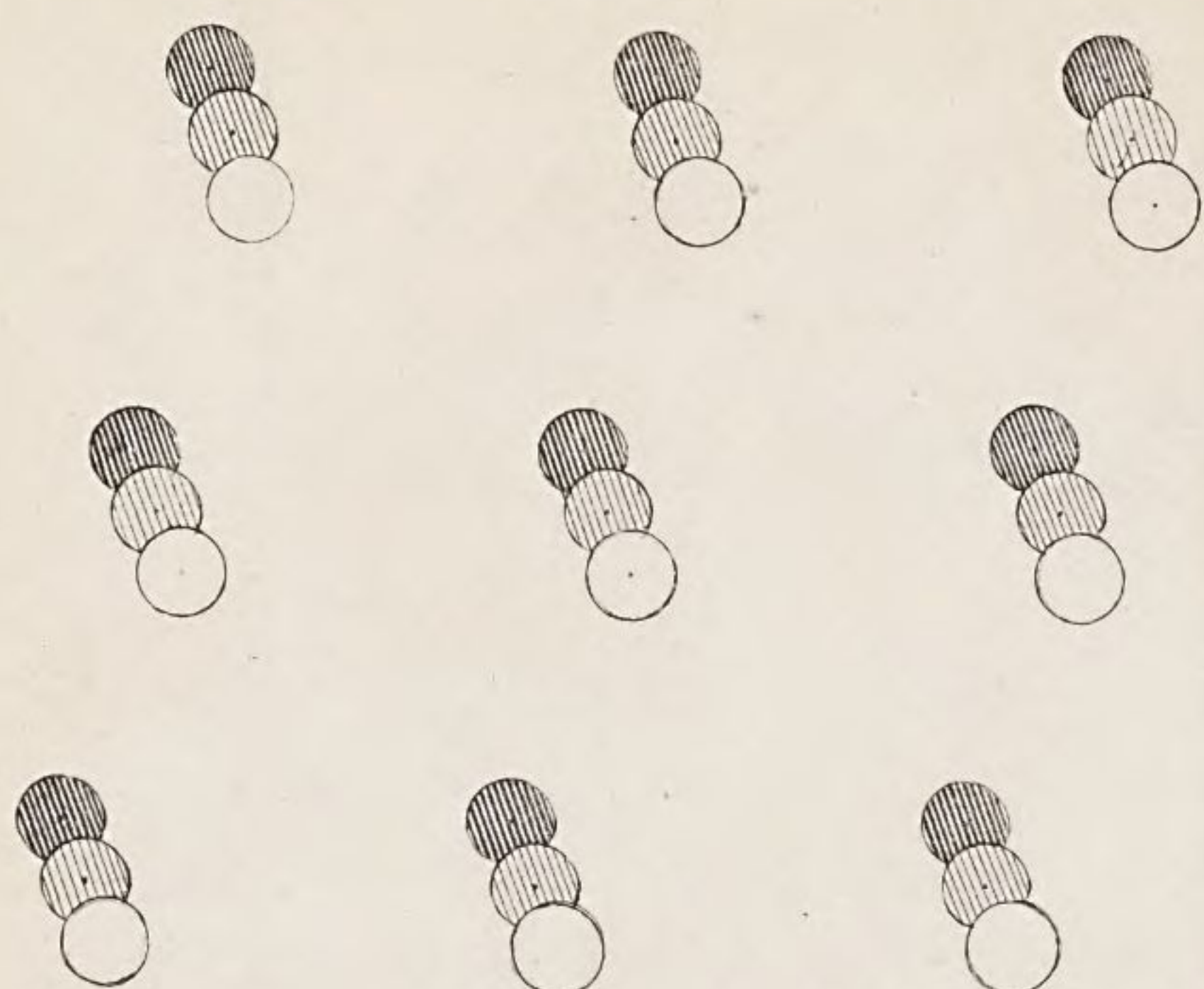


Erklärung der Tafeln.

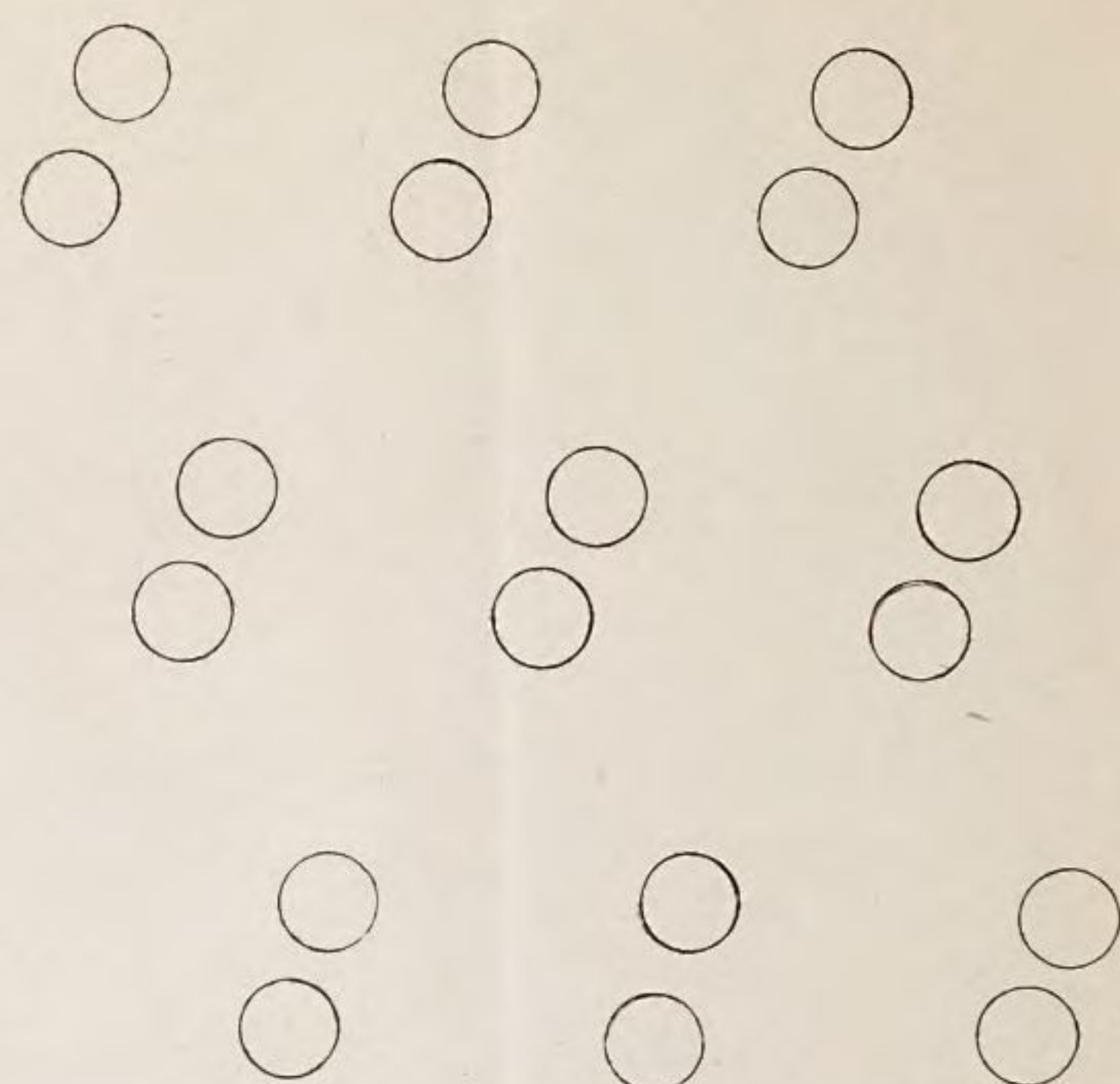
Die Figuren der folgenden 5 Tafeln stellen — mit Weglassung aller Deckbewegungsaxen — lediglich die regelmässigen Punktsysteme vor; dabei ist jeder Systempunkt durch einen Kreis veranschaulicht, welcher um so tiefer schattirt ist, je weiter entfernt von der Zeichnungsfläche stehend er gedacht werden soll. n aufeinander folgende Punkte einer n -punktschraube erscheinen hier also als n Kreise, von welchen jeder folgende tiefer schattirt ist als der vorhergehende, und deren Centra selbst auf einem Kreise angeordnet sind. Eine solche Schraube ist *rechts* oder *links* gewunden, je nachdem man durch die tiefere Schattirung die grössere Entfernung *unterhalb* oder *oberhalb* der Zeichnungsfläche angedeutet denkt. Abgesehen von Fig. I (Taf. I) und Fig. 54 und 59 (Taf. V) stellt jeder Kreis die Projektion von unendlich vielen, in gleichen Abständen übereinander liegenden Punkten vor.

Zwei dicht beisammenstehende Kreise, deren einer vollständig vorhanden, während der andere nur zum Theil sichtbar ist, weil er sonst in den anderen hineingreifen würde, bedeuten 2 in verschiedener Entfernung von der Projektionsebene, jedoch nicht weit von einander befindliche, Systempunkte. Ein solches Kreispaar ist auffassbar als Abbildung zweier Kugeln, deren eine von der anderen z. Th. verdeckt wird, so wie es in den im § 29 beschriebenen Modellen vorkommt.

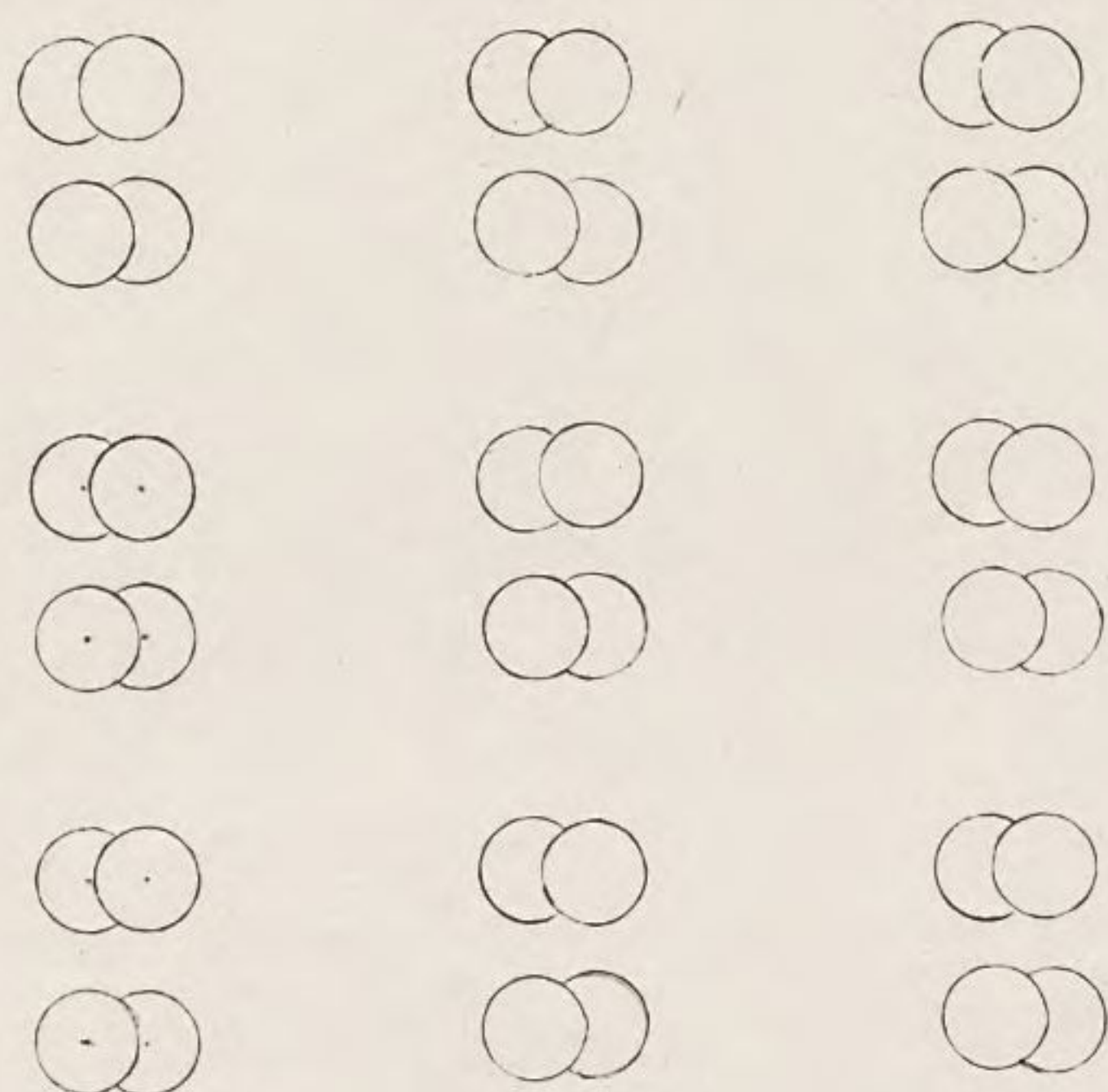
Jede der Figuren 57, 58 (Taf. IV) und 62 bis 65 (Taf. V) besteht aus 3 durch dicke Striche getrennten Theilen, welche folgende Bedeutung haben: Ein jedes der durch diese Figuren dargestellten Punktsysteme besteht aus 3, nach 3 senkrechten Richtungen durcheinander gesteckten Theilsystemen. Wenn man nun durch irgend einen Ort 3 Ebenen legt, bezüglich senkrecht auf den Hauptaxen der 3 Theilsysteme, so dass sie Hauptebenen für letztere sind, wenn man alsdann jedes Theilsystem für sich auf diese seine Hauptebene projicirt, und dann 2 jener Hauptebenen in die Fläche der dritten umklappt, so ist eine der fraglichen Figuren konstruirt.



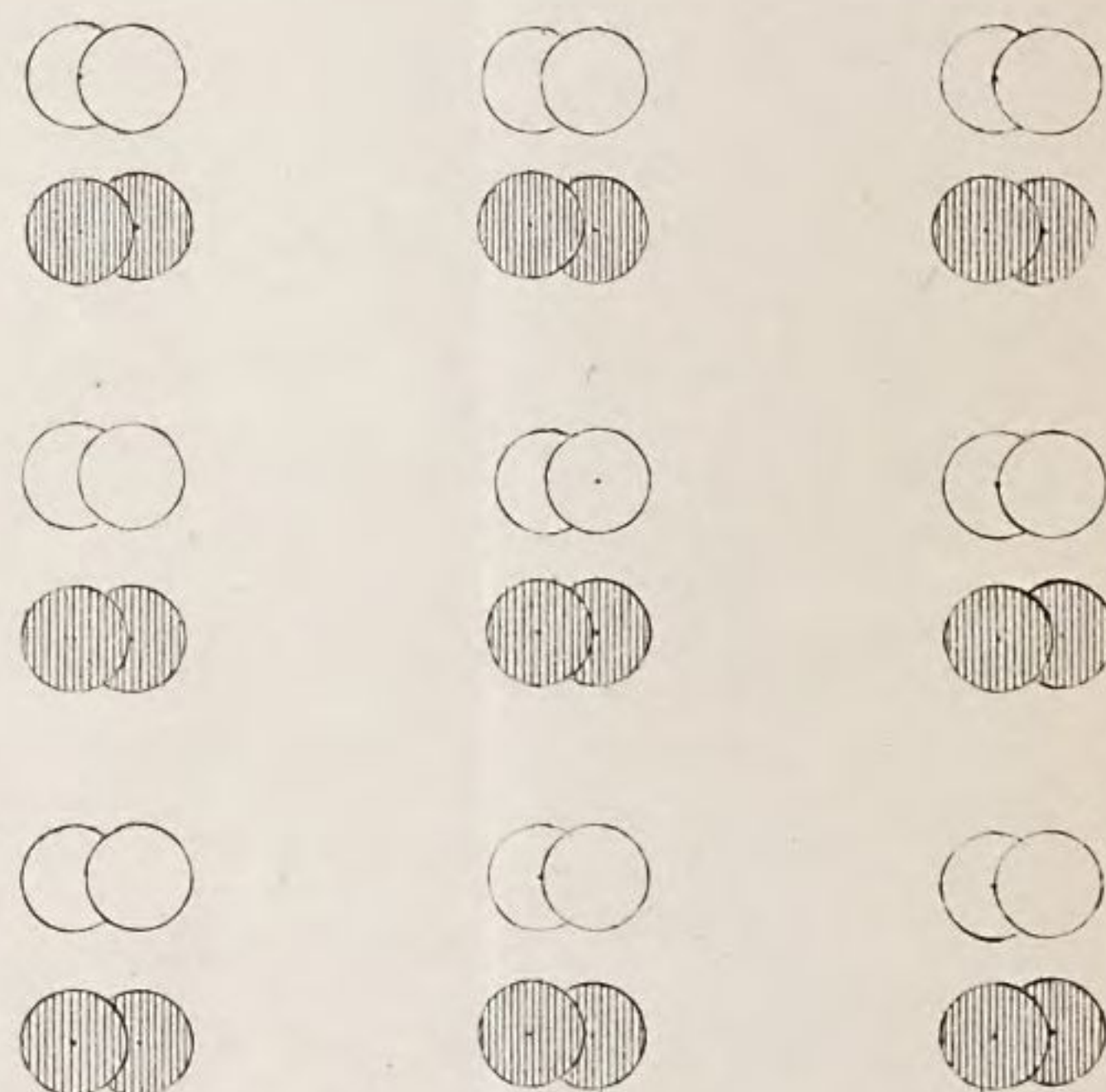
1. Axenloses Raumgitter. I.



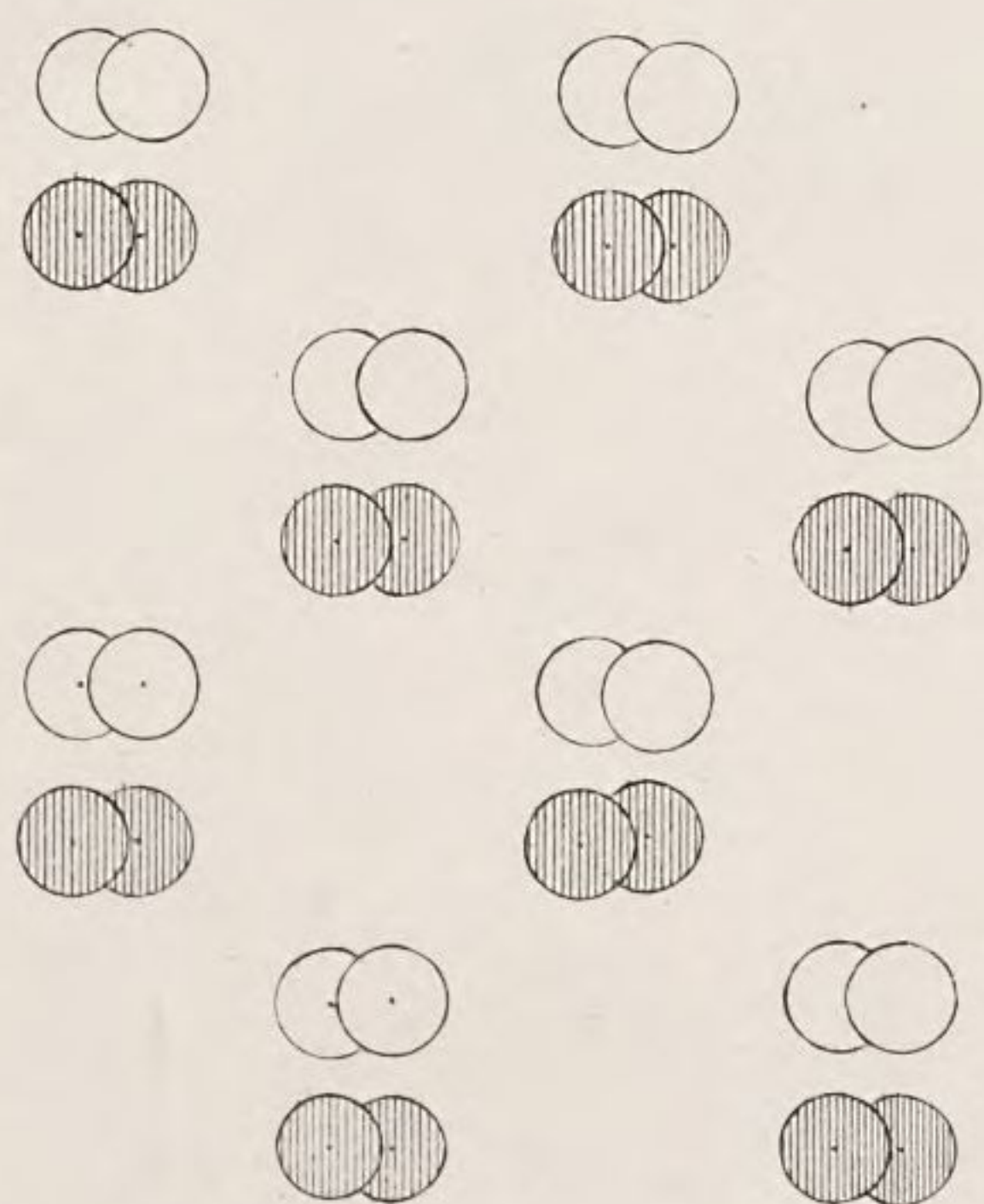
2. 2-zähliges Säulensystem. II A.



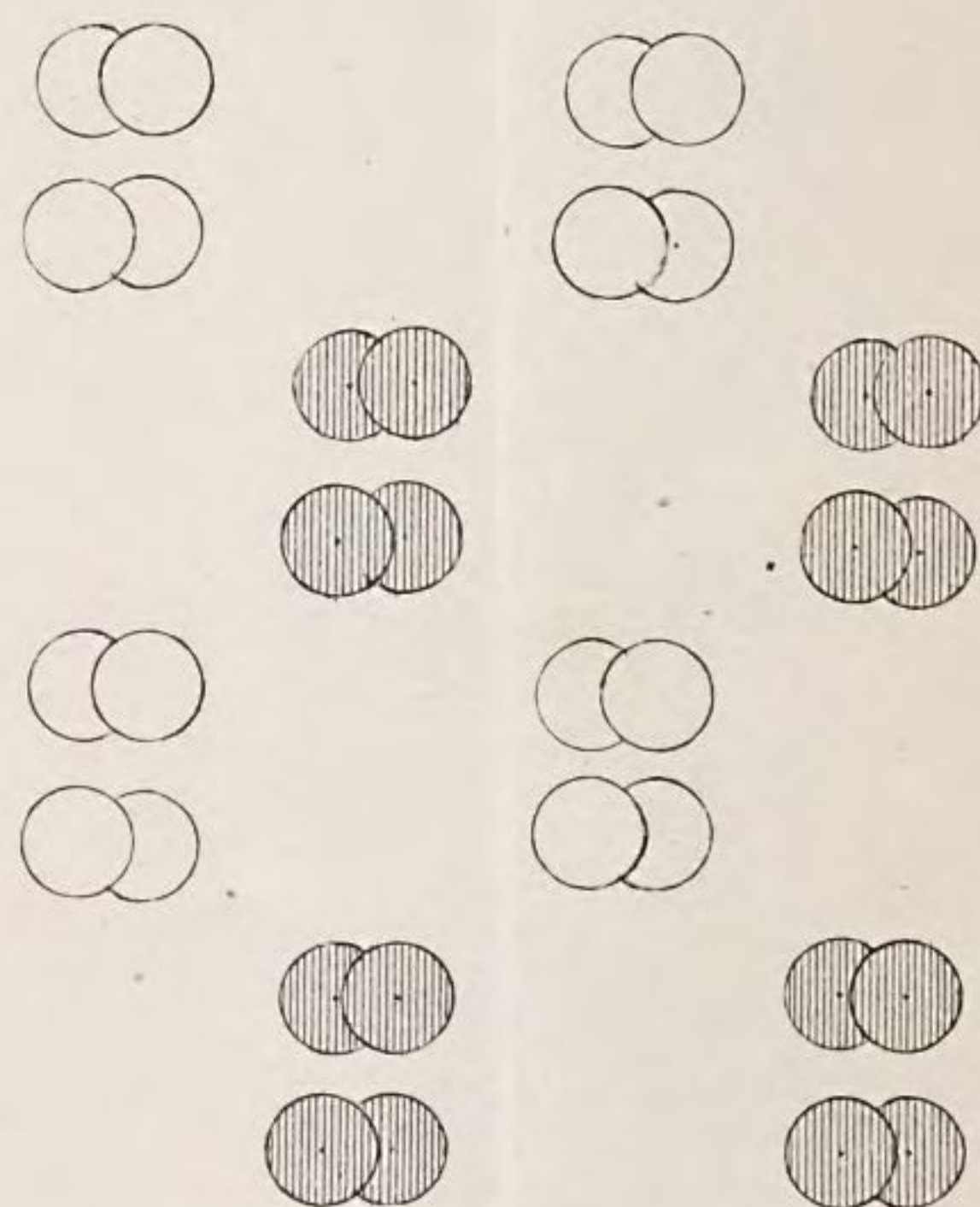
5. System der rechteckigen Säule. II B α.



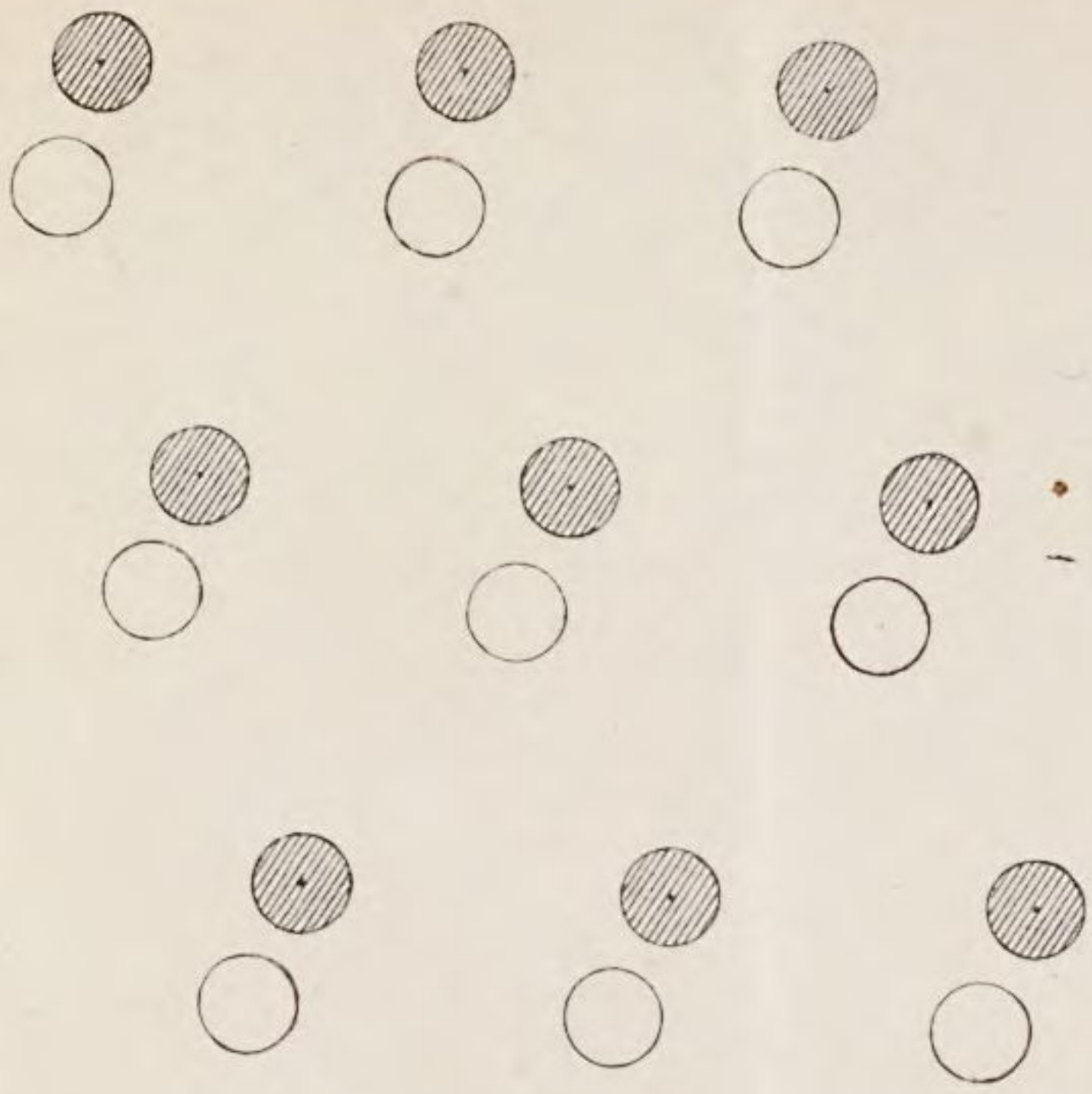
6. Zusammengesetztes rechteckiges
2-punktschraubensystem. II B α.



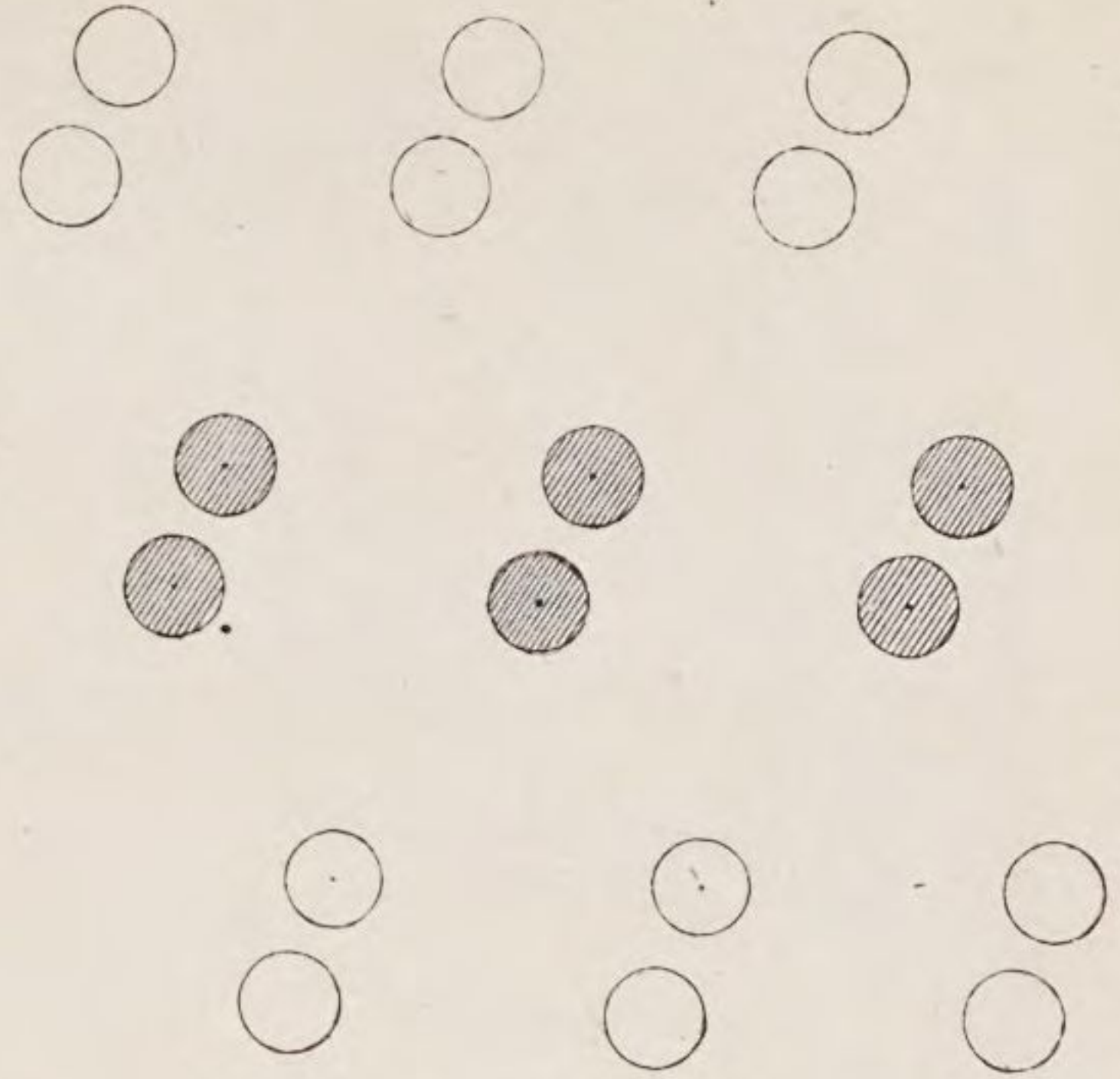
9. Zusammengesetztes rhombisches
2-punktschraubensystem. II B β.



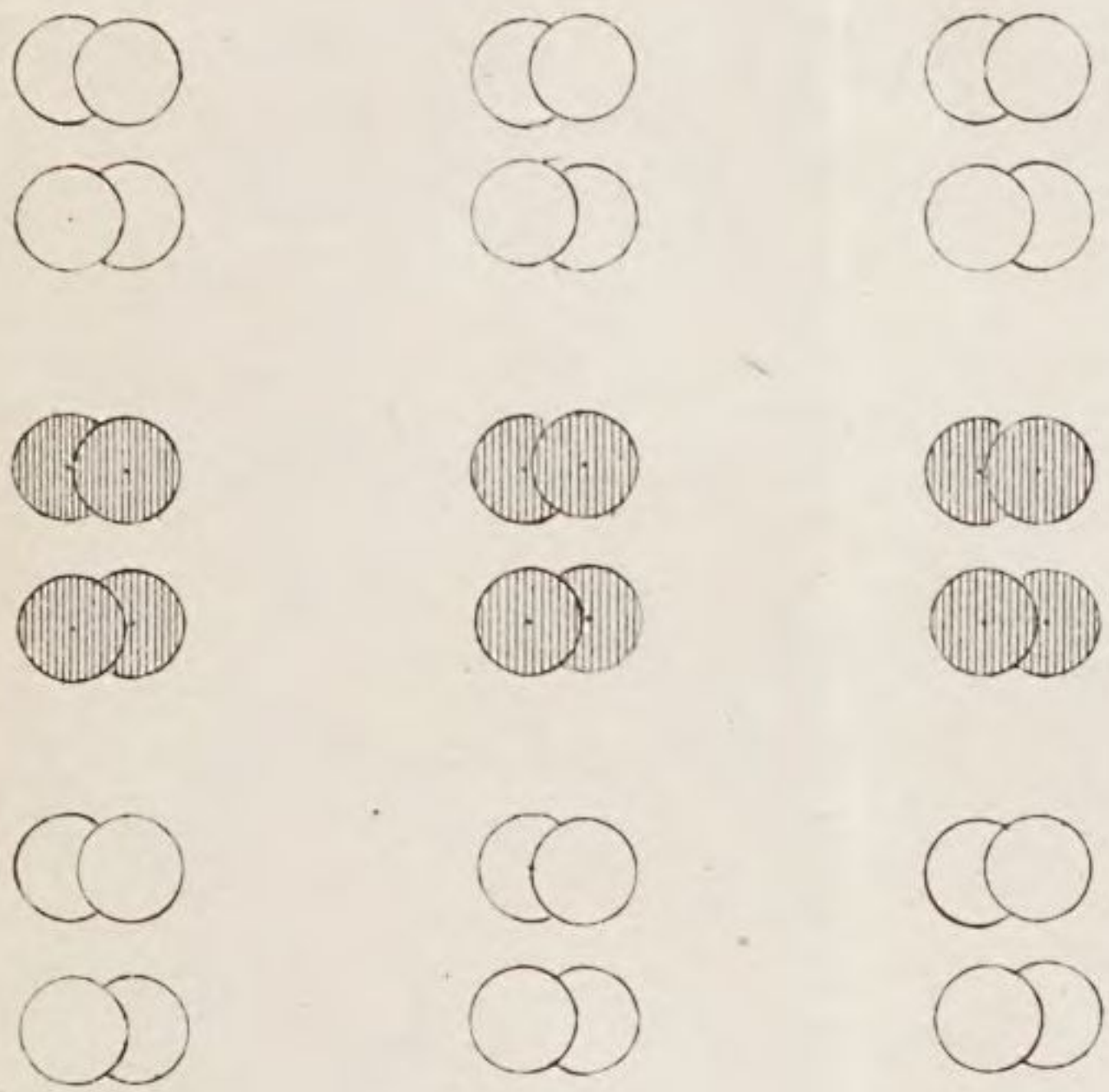
10. System des Oblongoktaeders. II B β.



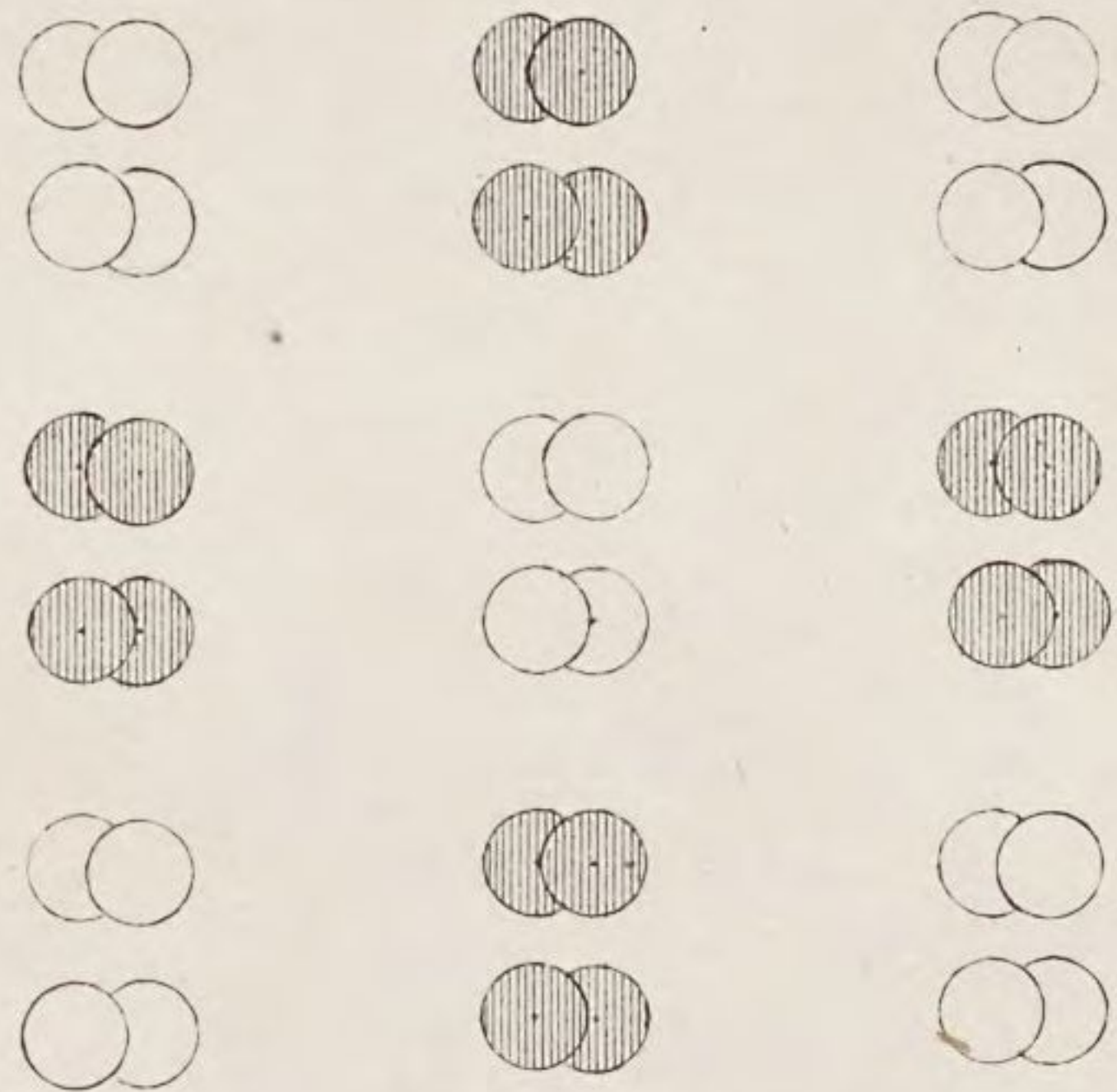
3. 2-punktschraubensystem. II A.



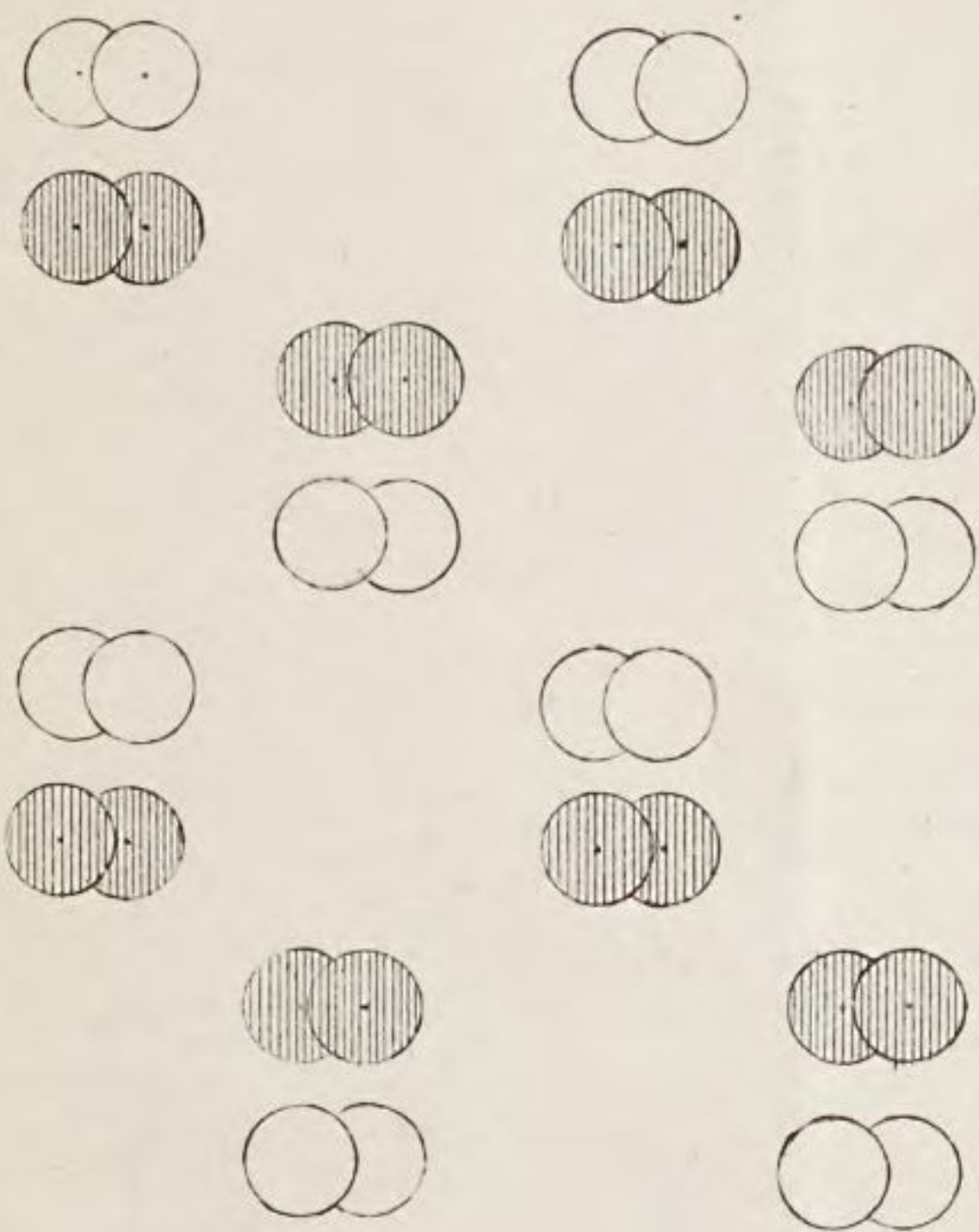
4. System der klinorhombischen Säule. II A.



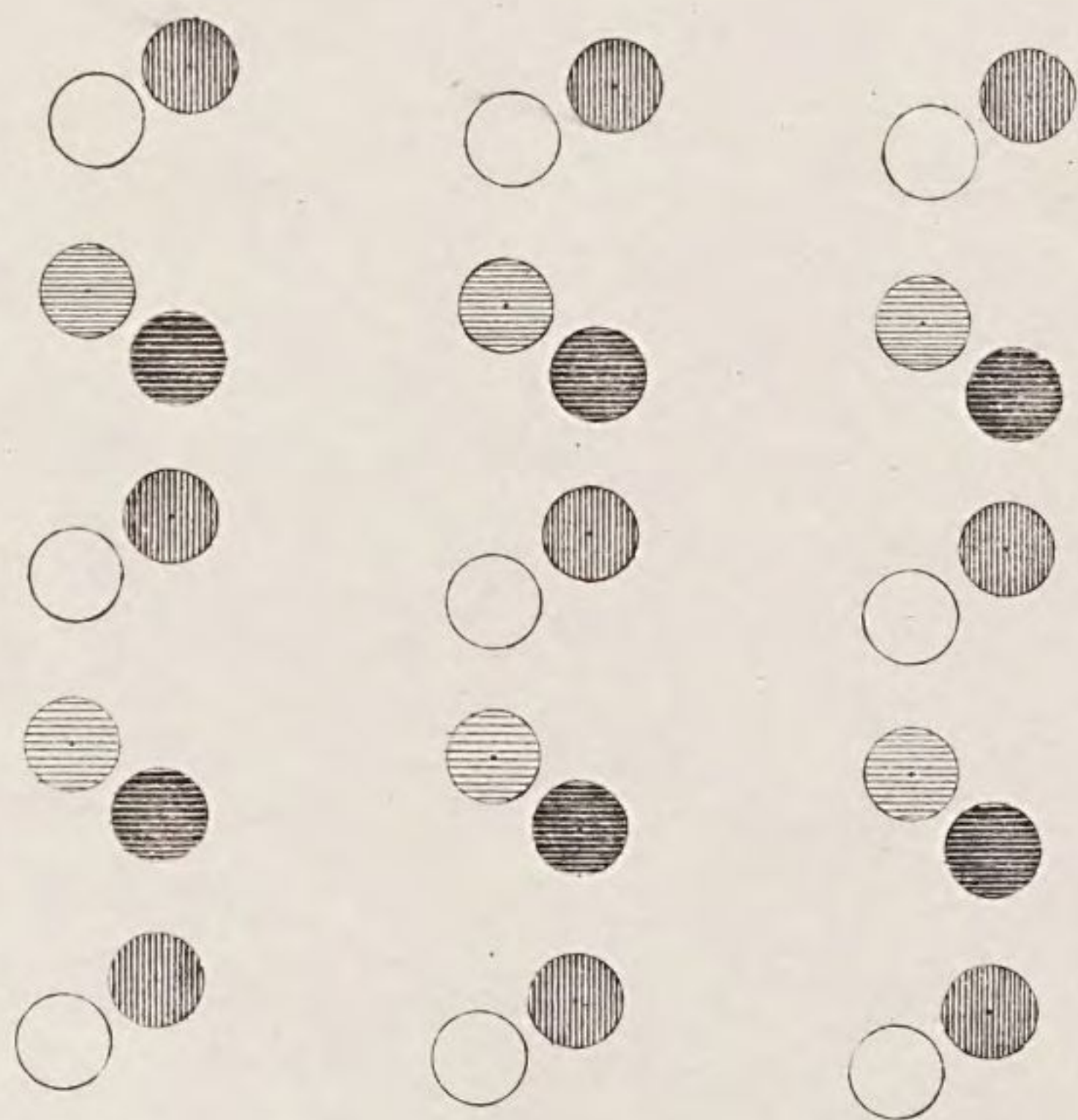
7. System der Rhombensäule erster Art.
II B α .



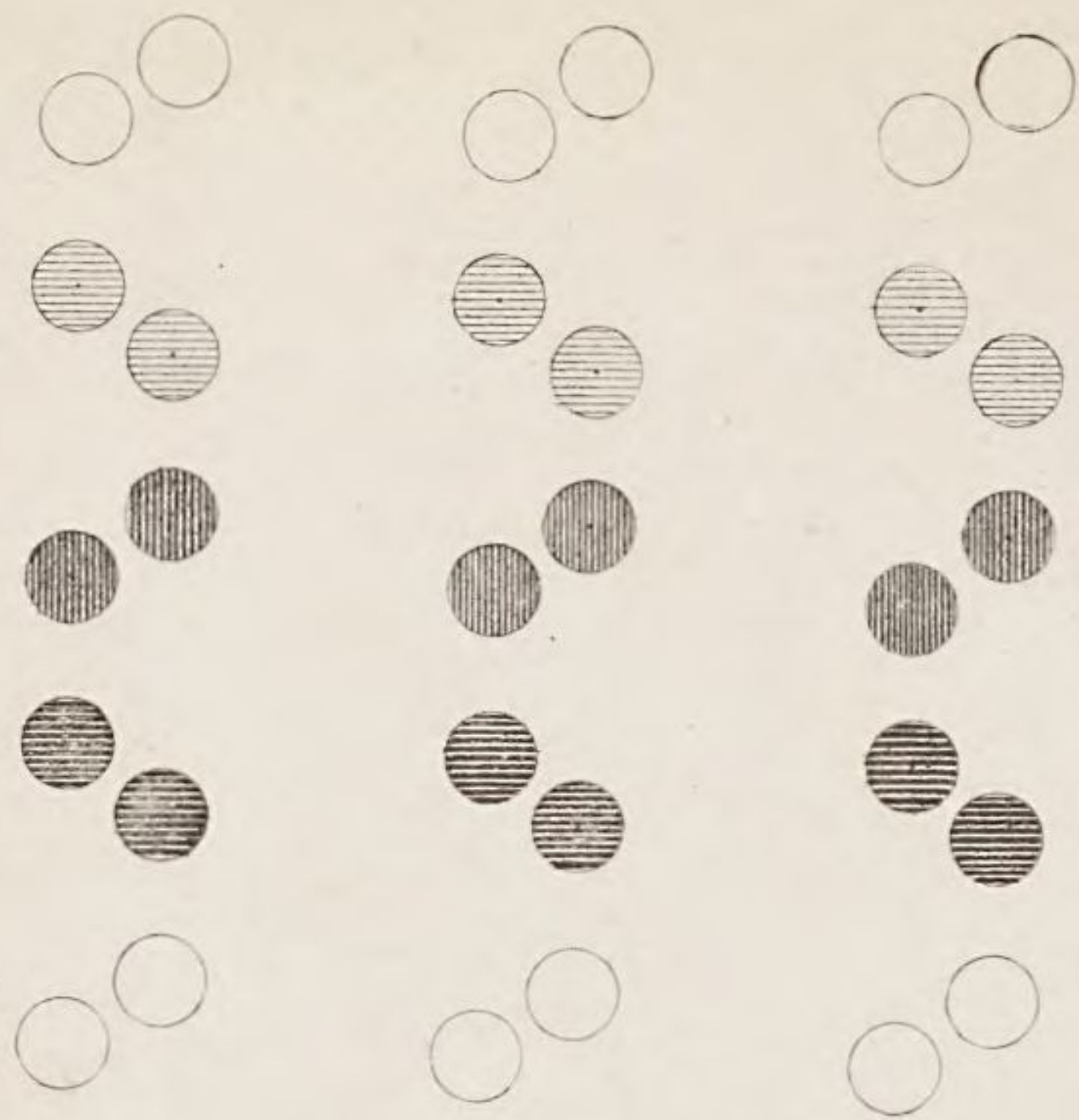
8. Rhombenoktaedersystem. II B α .



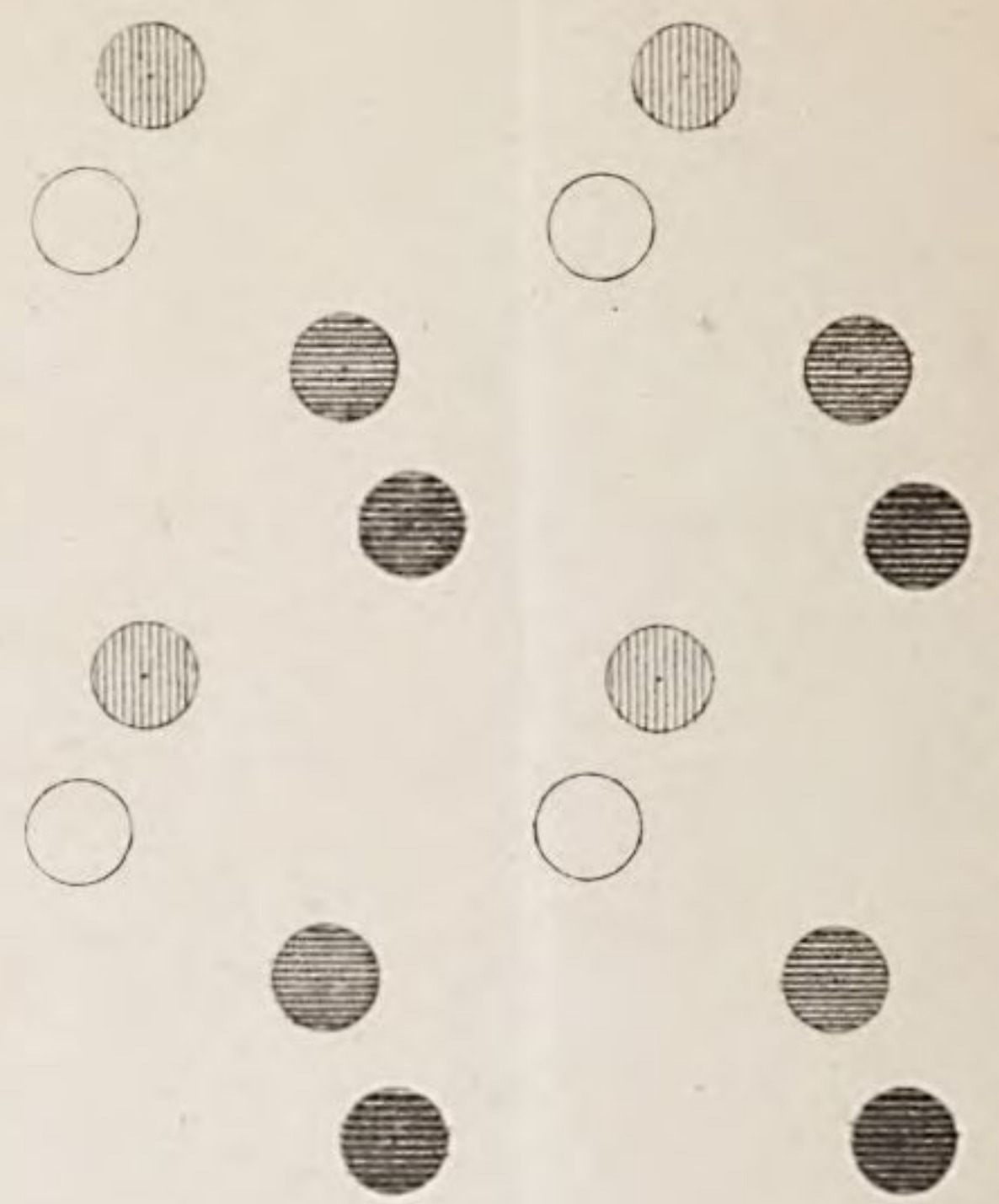
11. Rhombisches Gegenschraubensystem. II B β .



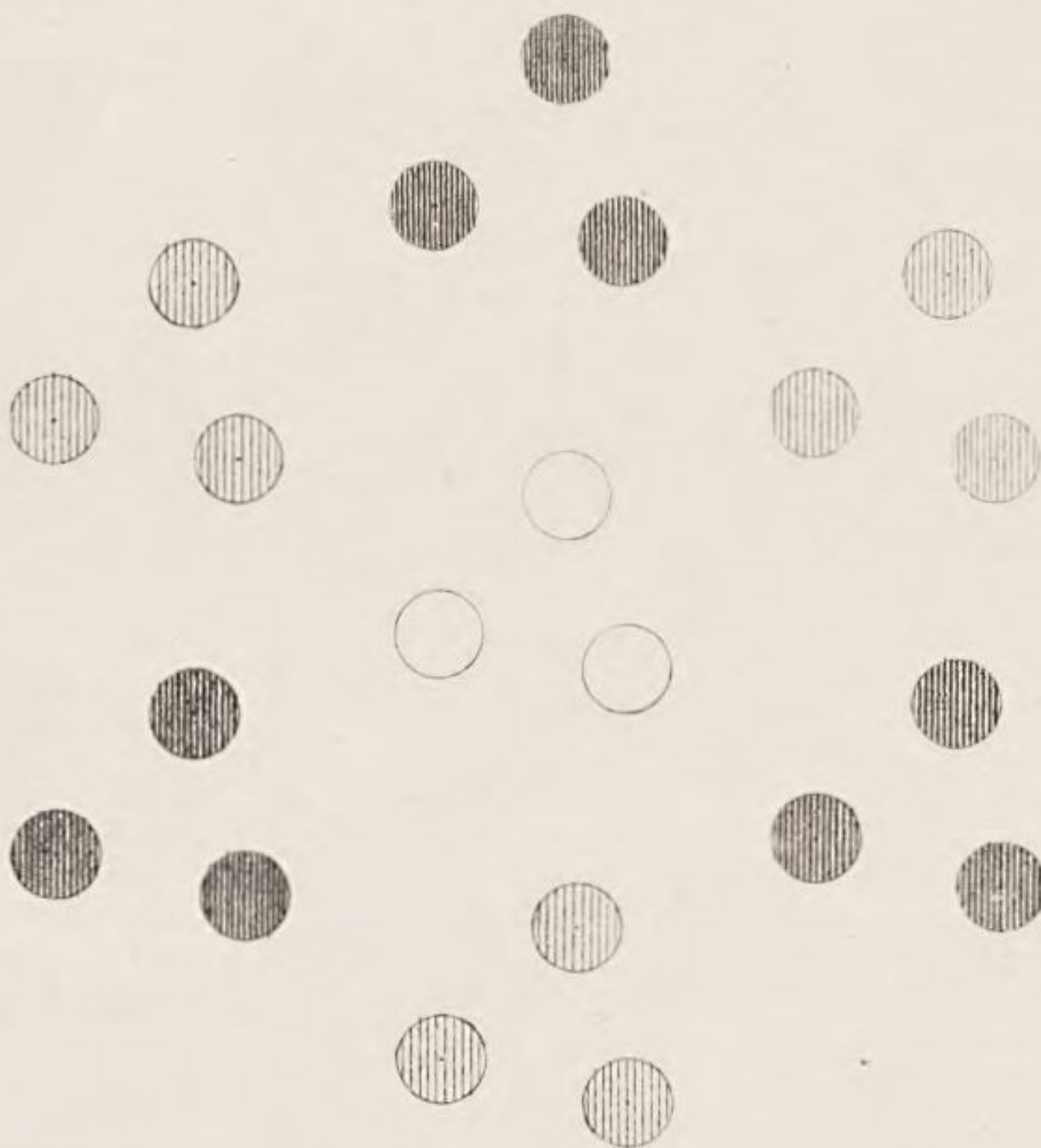
12. Abwechselndes rechteckiges 2-punkt-
schraubensystem erster Art. II B γ .



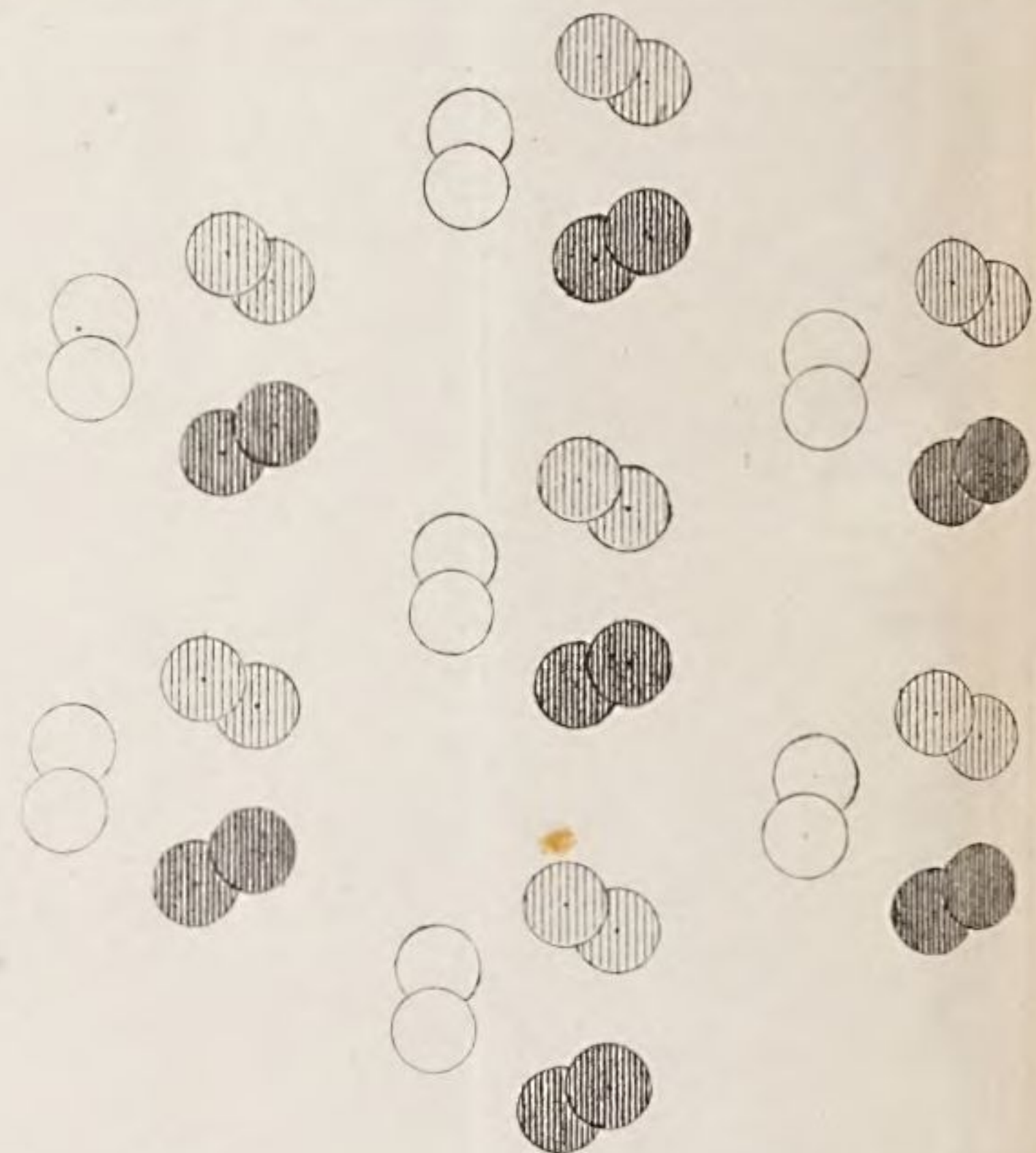
13. System der Rhombensäule zweiter Art. IIBy.



14. Abwechselndes rechteckiges 2-punktschraubensystem zweiter Art, II Bδ



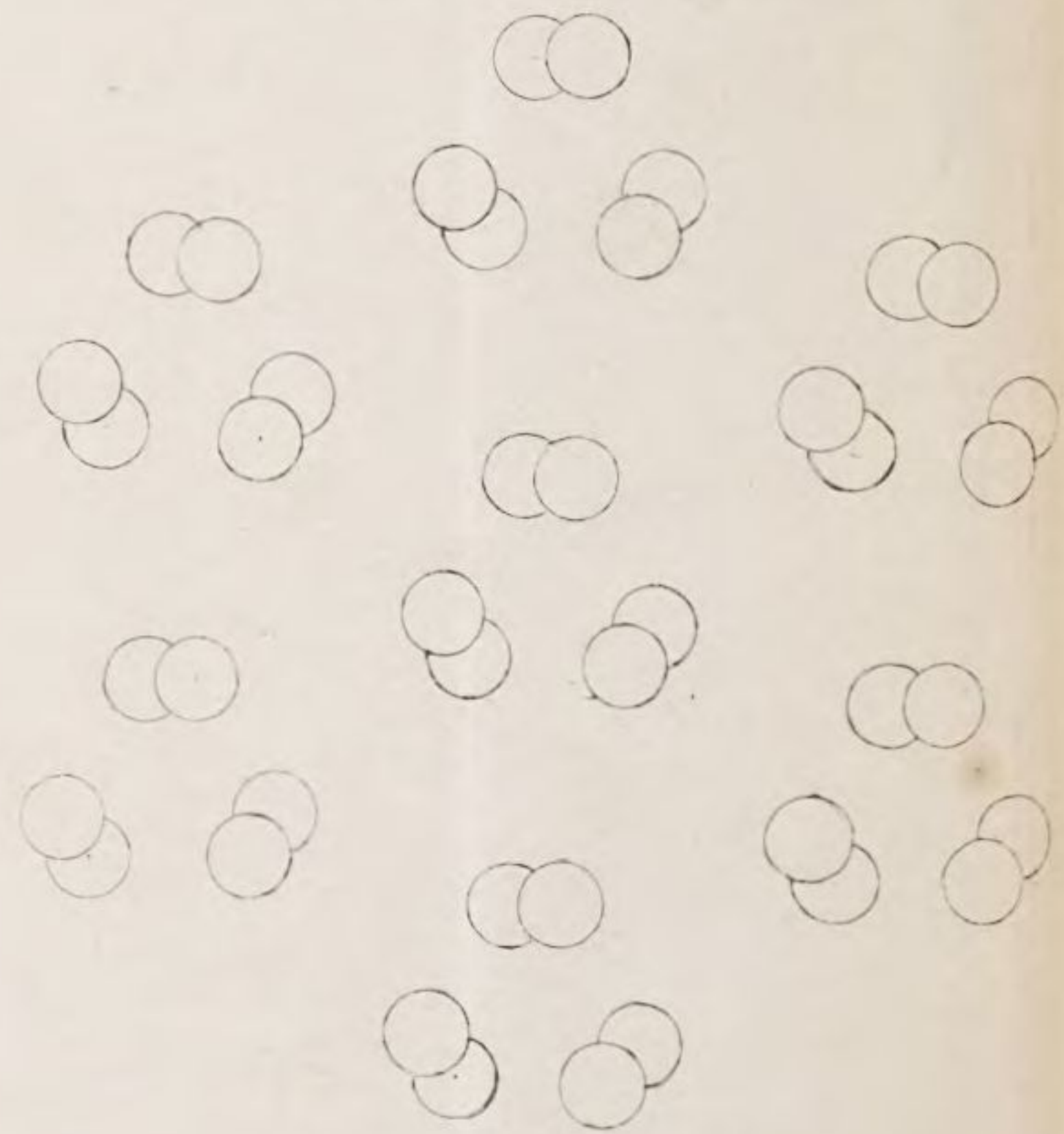
18. Rhomboëdersystem. IIIA.



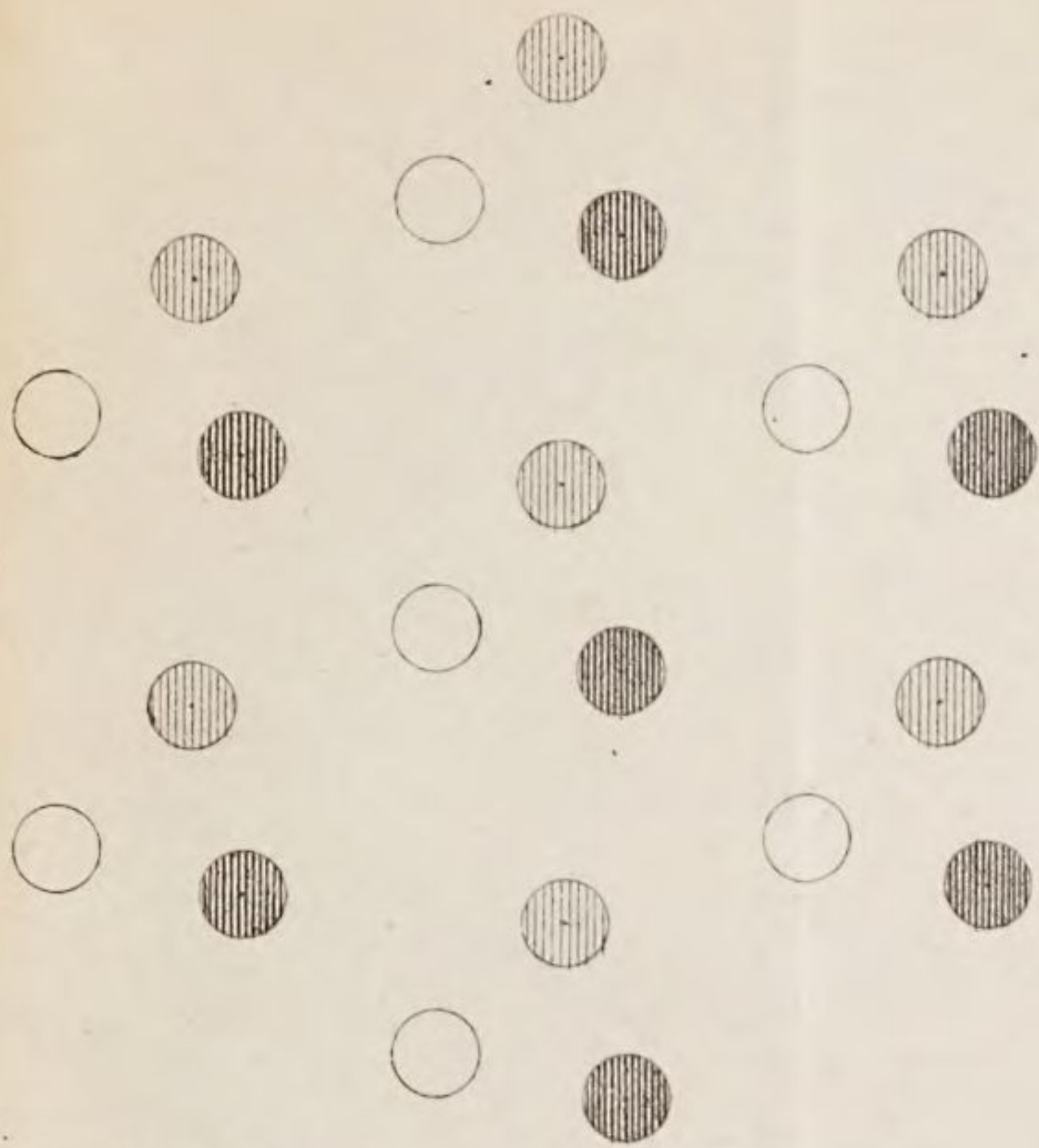
19. Rechtes } zusammengesetztes 3-punktschraubensystem. IIIB
20. Linkes }



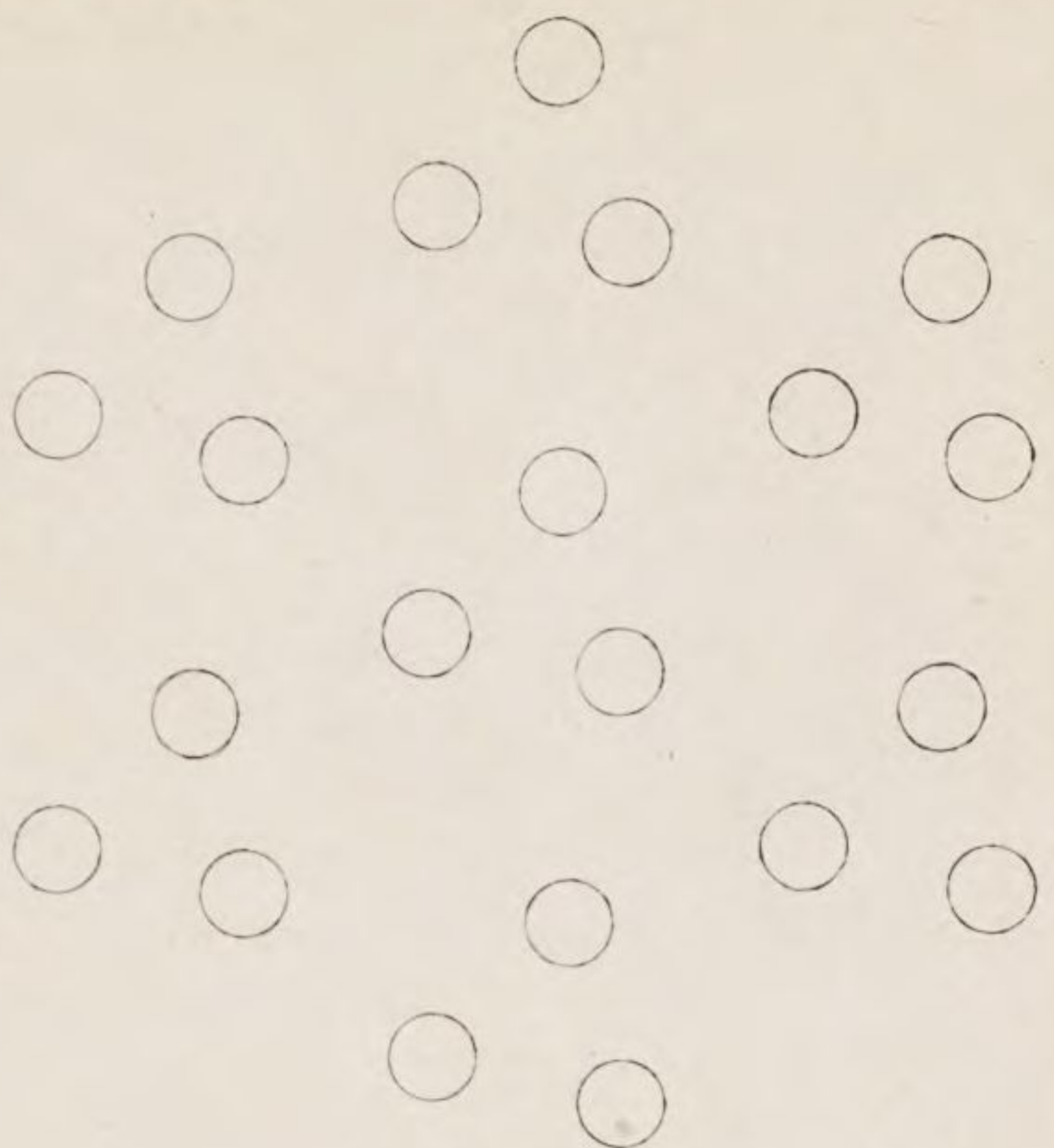
23. Rechtes } abwechselndes 3-punktschraubensystem. IIIBβ.
24. Linkes }



25. Abwechselndes 3-seitiges Säulensystem. III



15. Rechtes } 3-punktschraubensystem. IIIA.
16. Linkes }



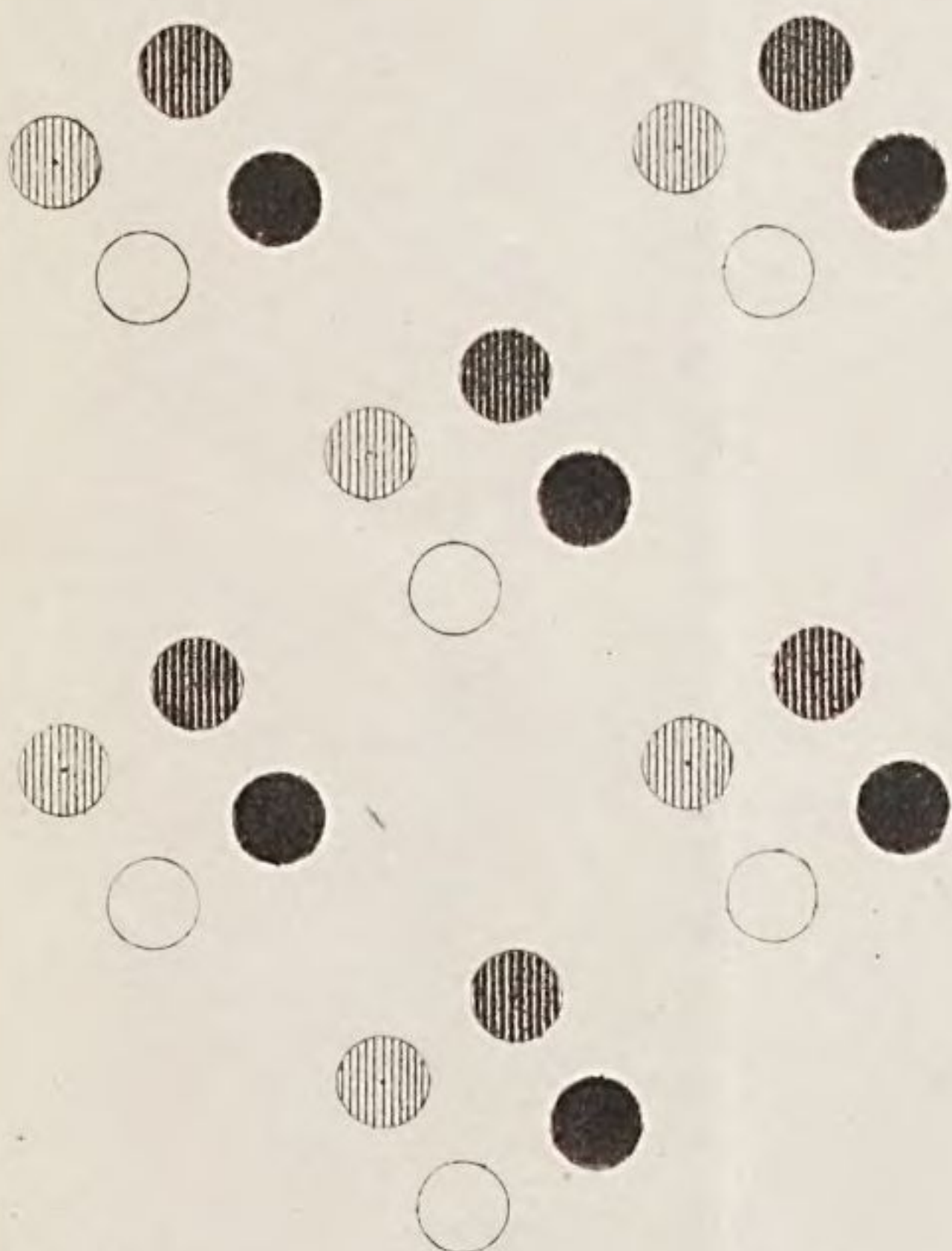
17. 3-seitiges Säulensystem. IIIA.



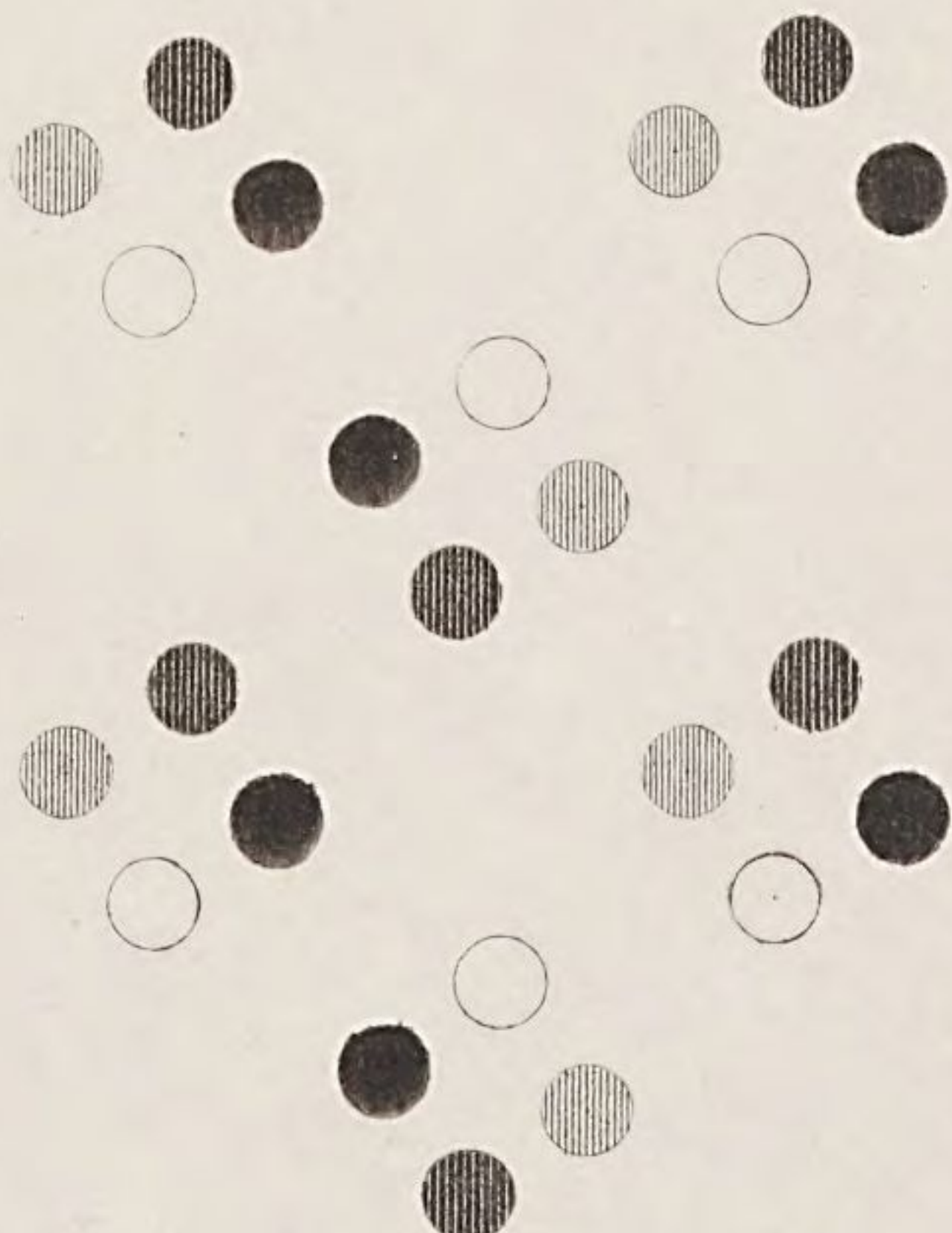
21. Zusammengesetztes 3-seitiges
Säulensystem. IIIB α



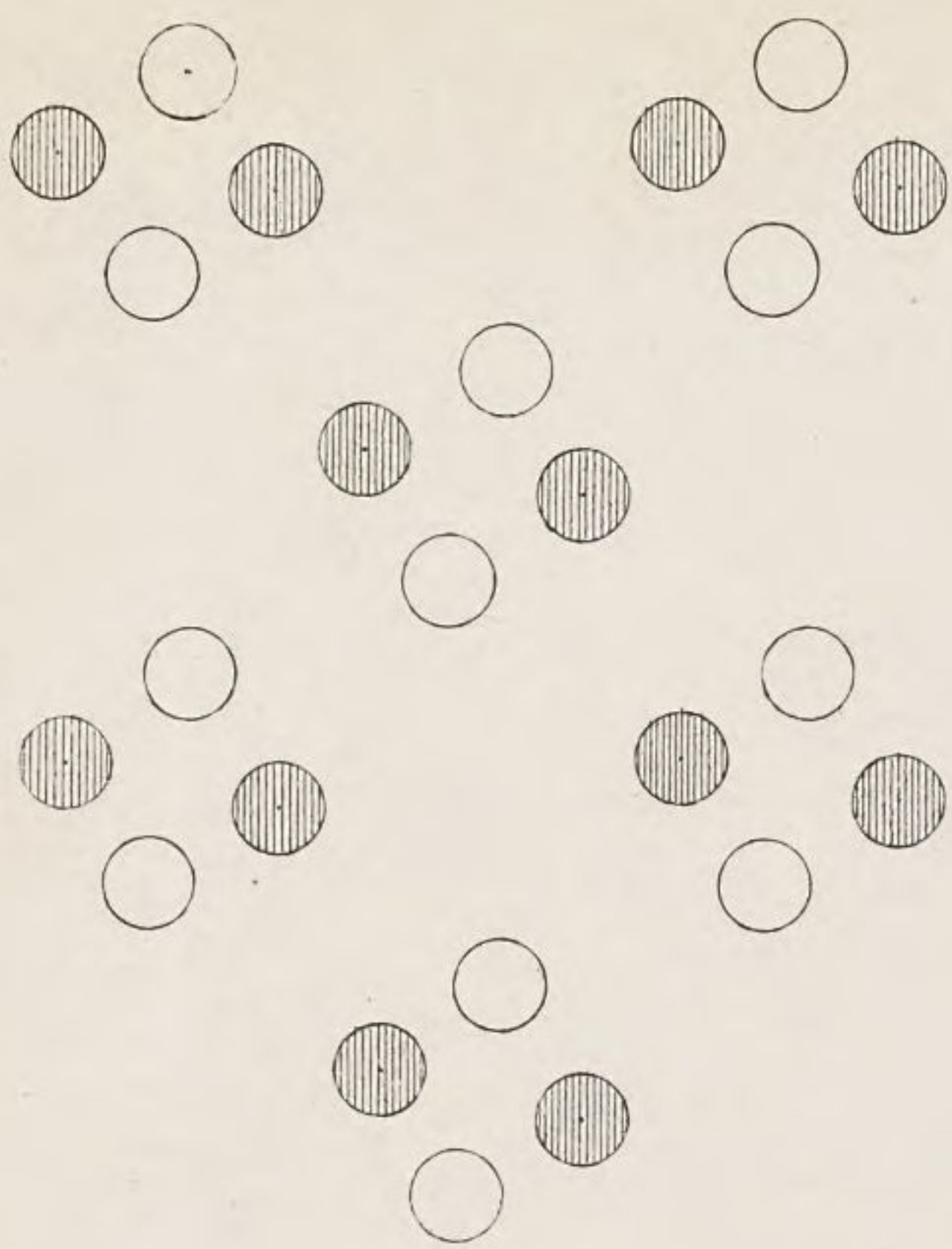
22. Zusammengesetztes Rhomboëdersystem. IIIB α



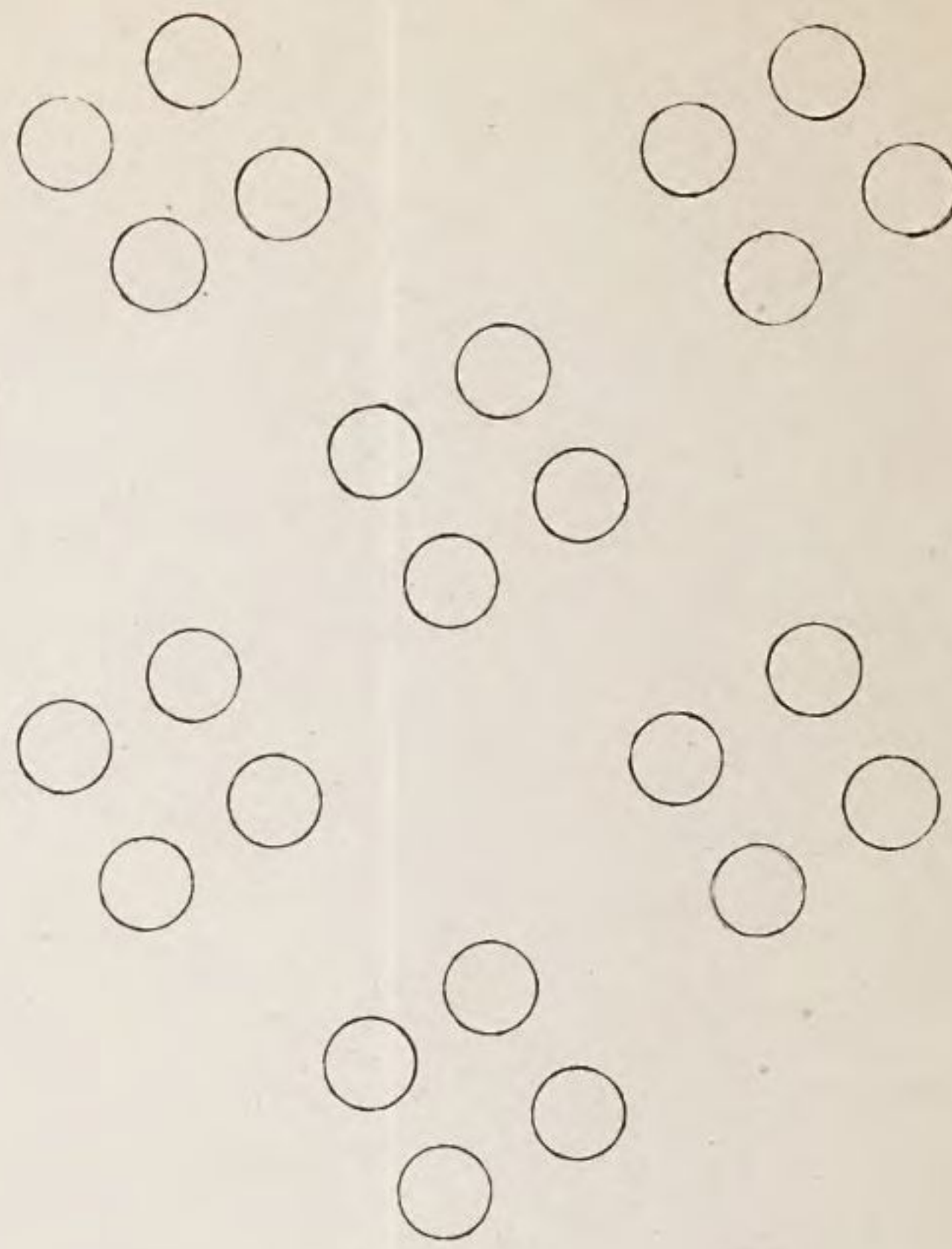
26. Rechtes } 4-punktschraubensystem. IVA.
27. Linkes }



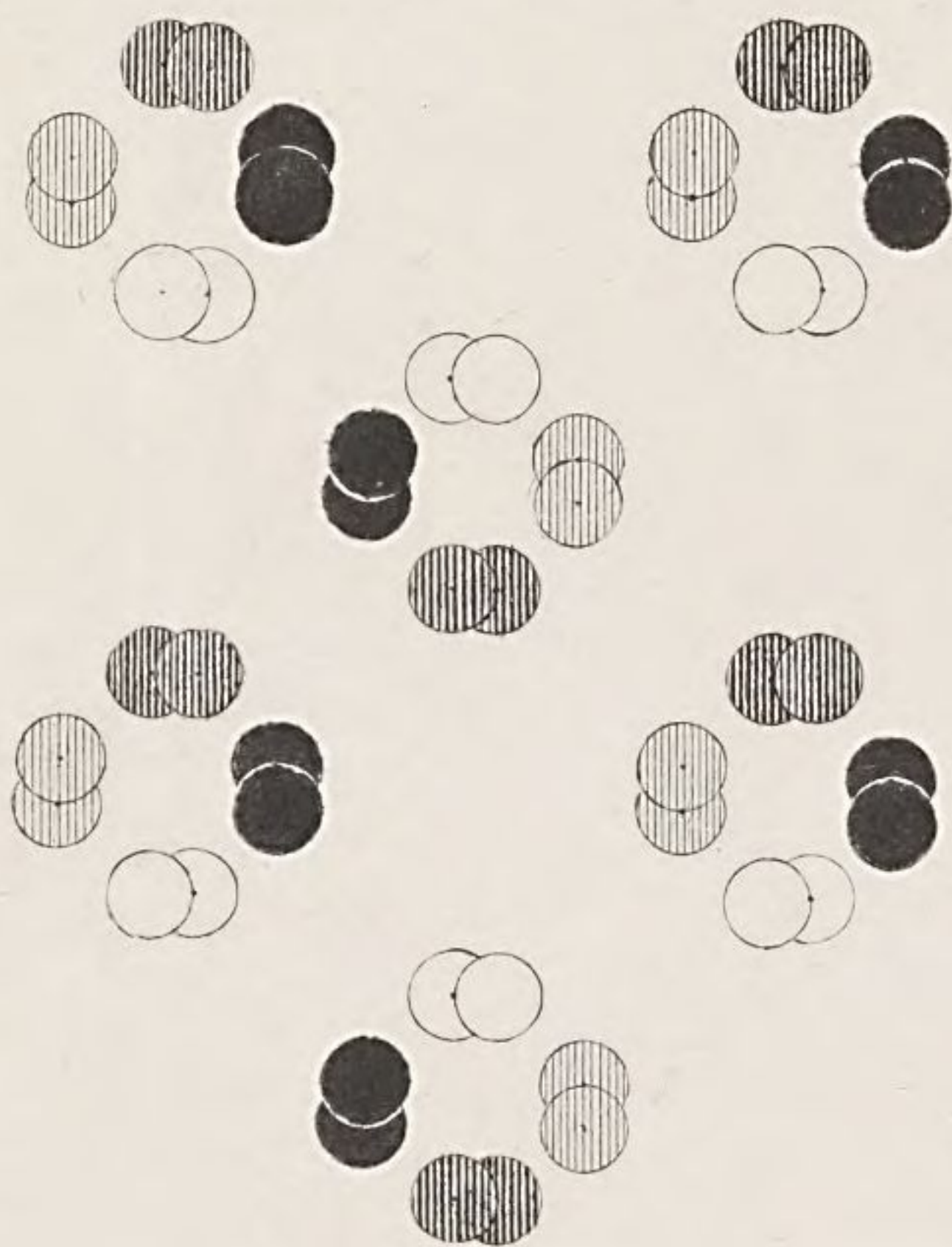
28. 4-zähliges Gegenschraubensystem. IVA.



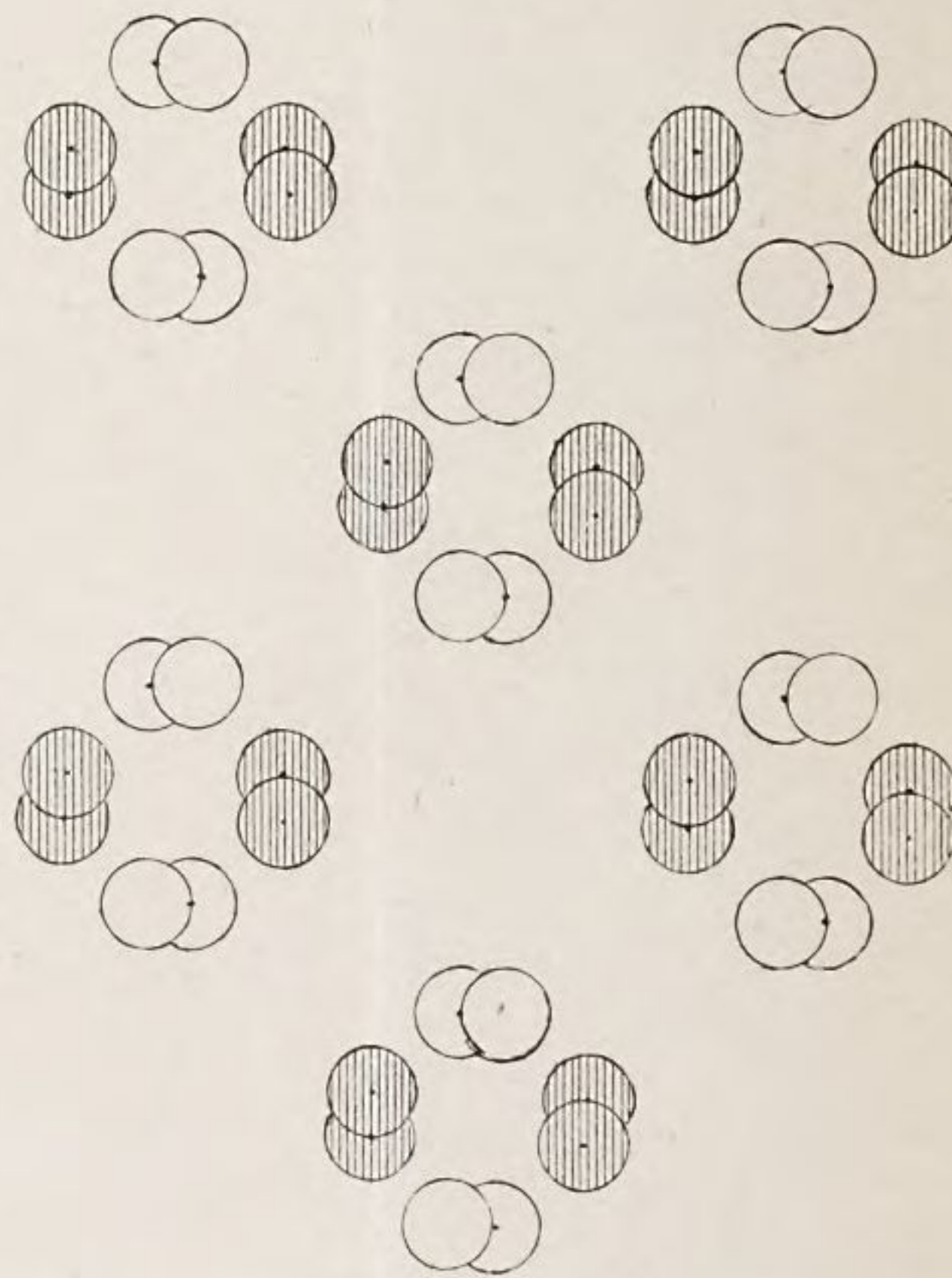
29. 2-gängiges 4-punktschraubensystem. IVA.



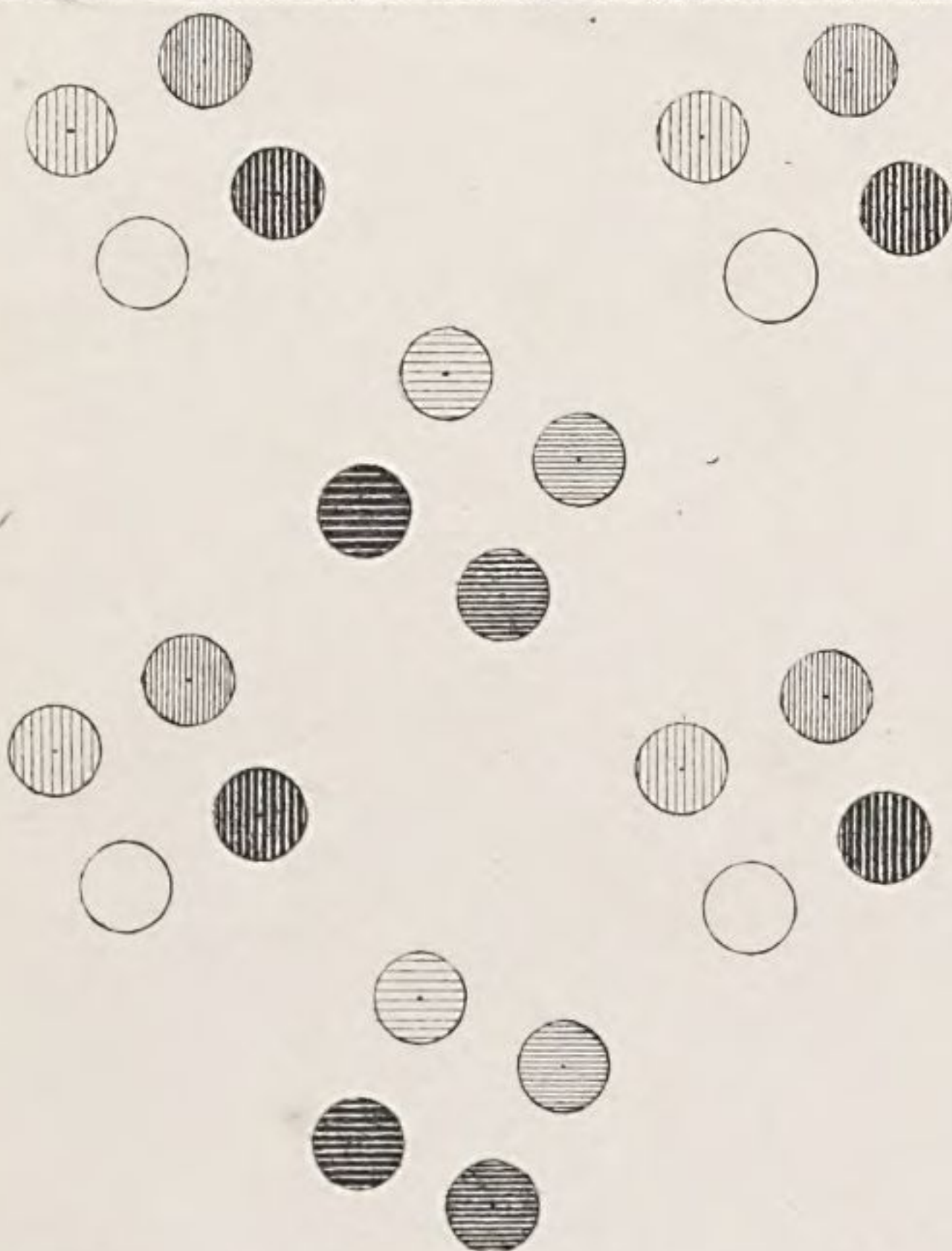
30. Quadratsäulensystem. IVA.



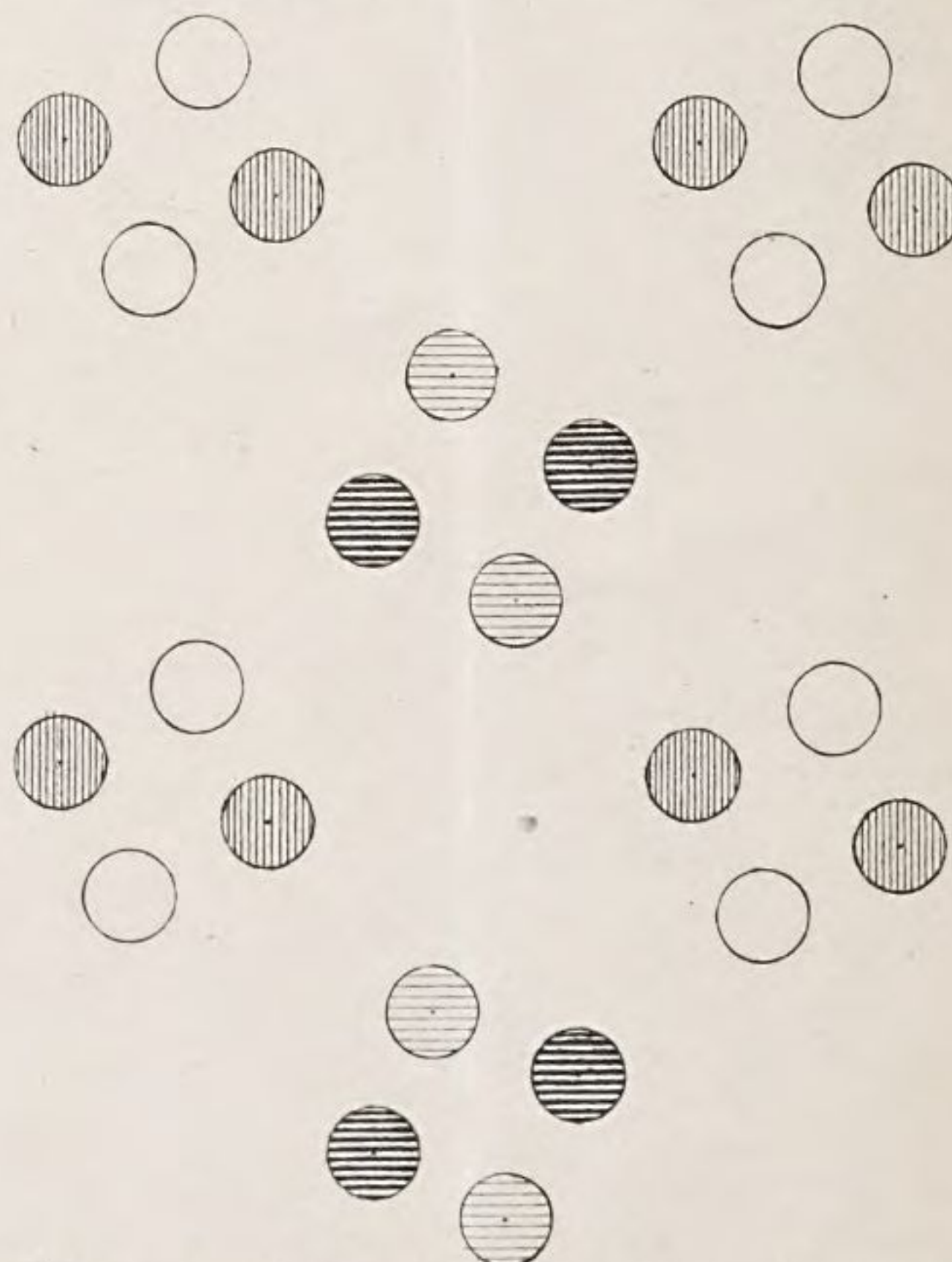
34. 4-zähliges zusammengesetztes Gegenschraubensystem. IVBα.



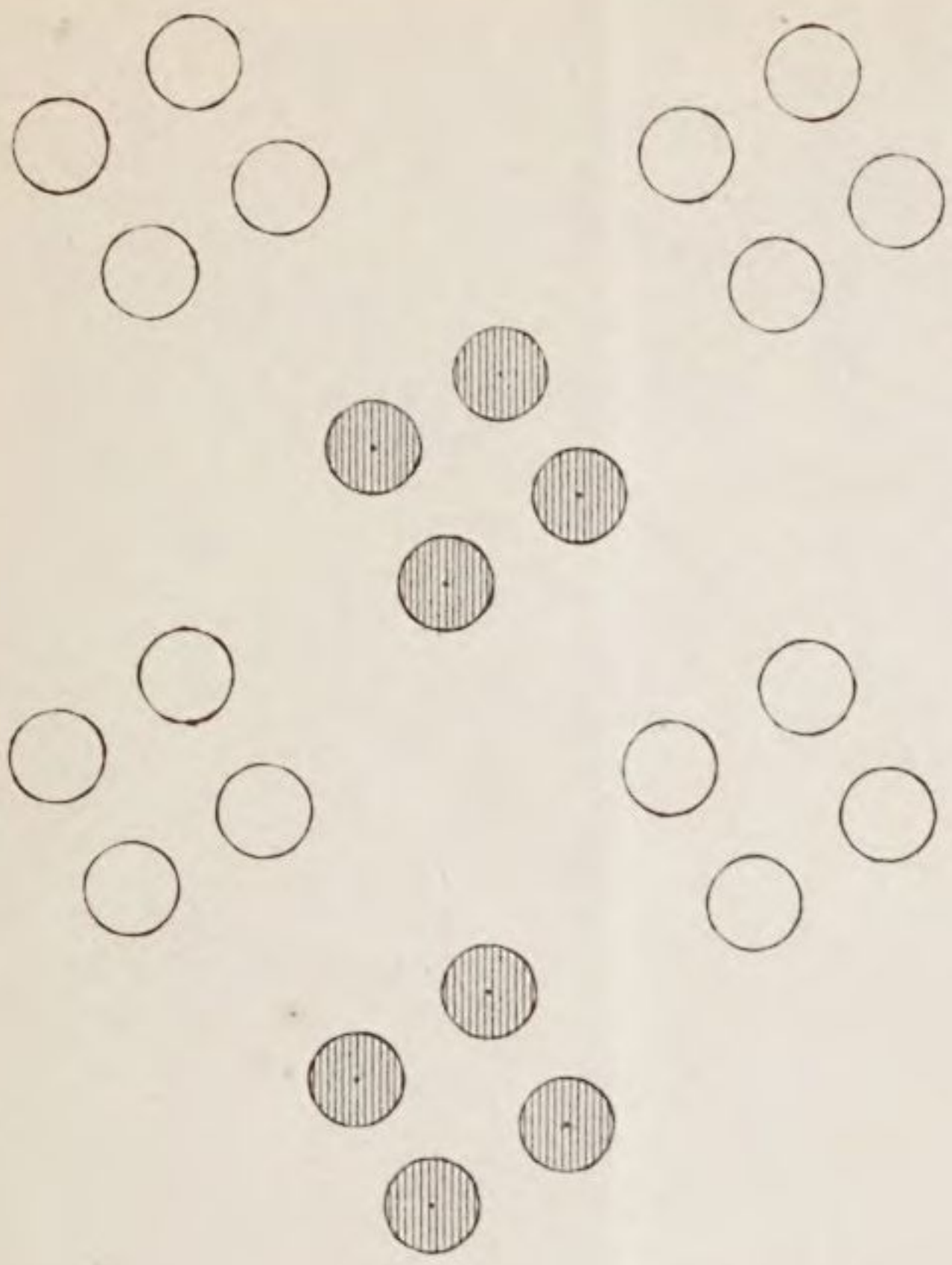
35. 2-gängiges zusammengesetztes 4-punktschraubensystem. IVBα.



38. Rechtes } abwechselndes 4-punkt-
39. Linkes } schraubensystem. IVBβ.

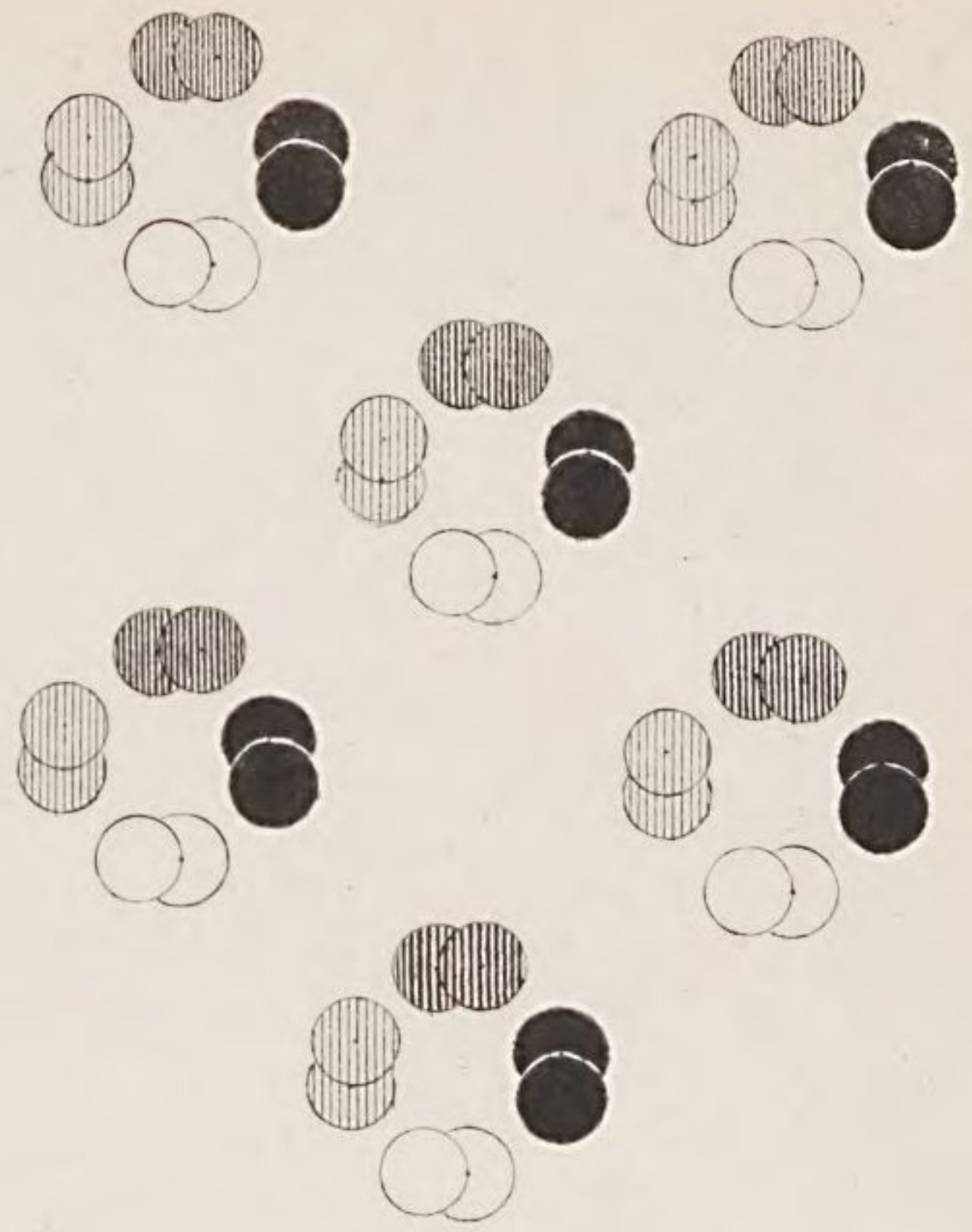


40. Abwechselndes 2-gängiges 4-punkt-
schraubensystem. IVBβ.



31. Quadratoktaedersystem.

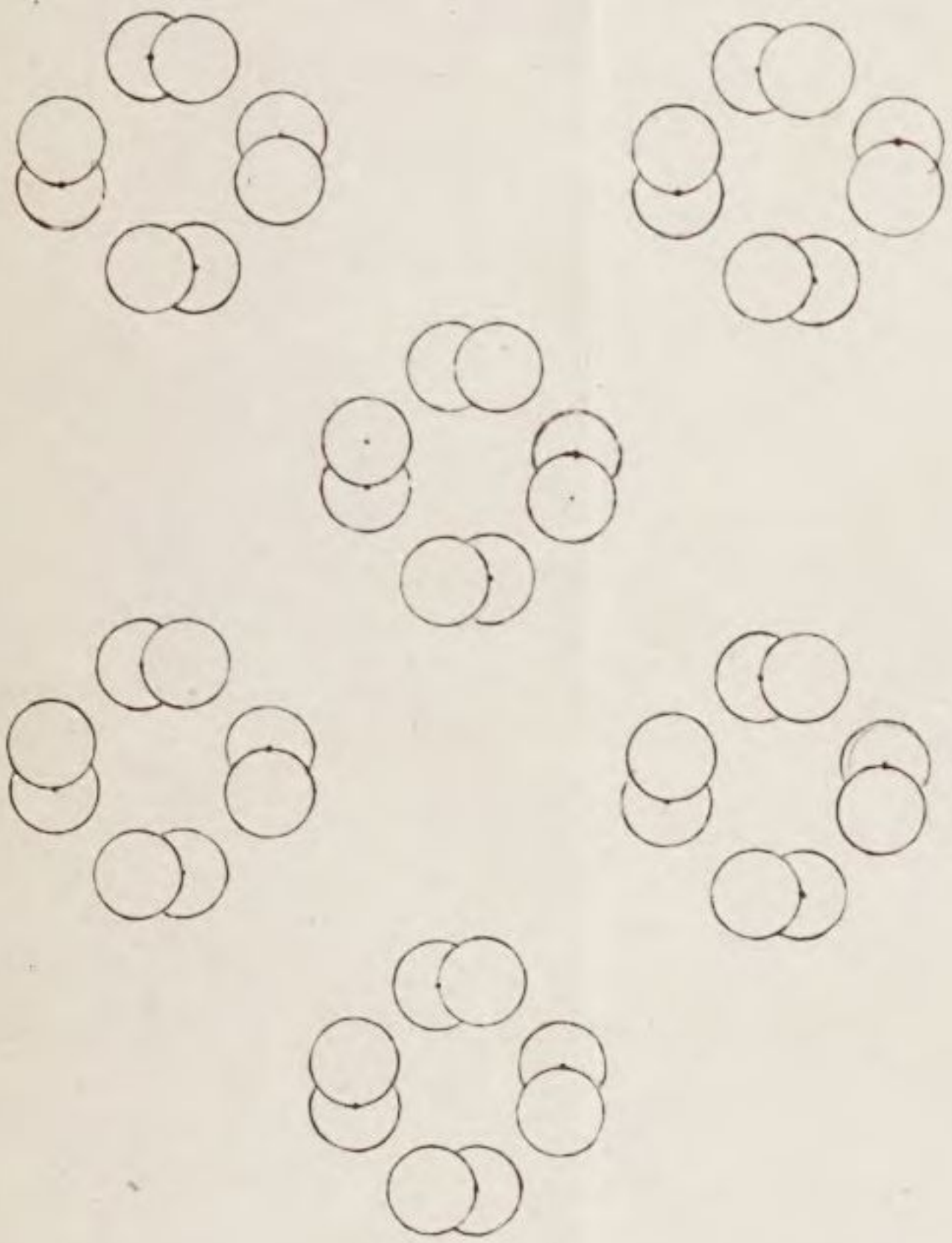
IVA.



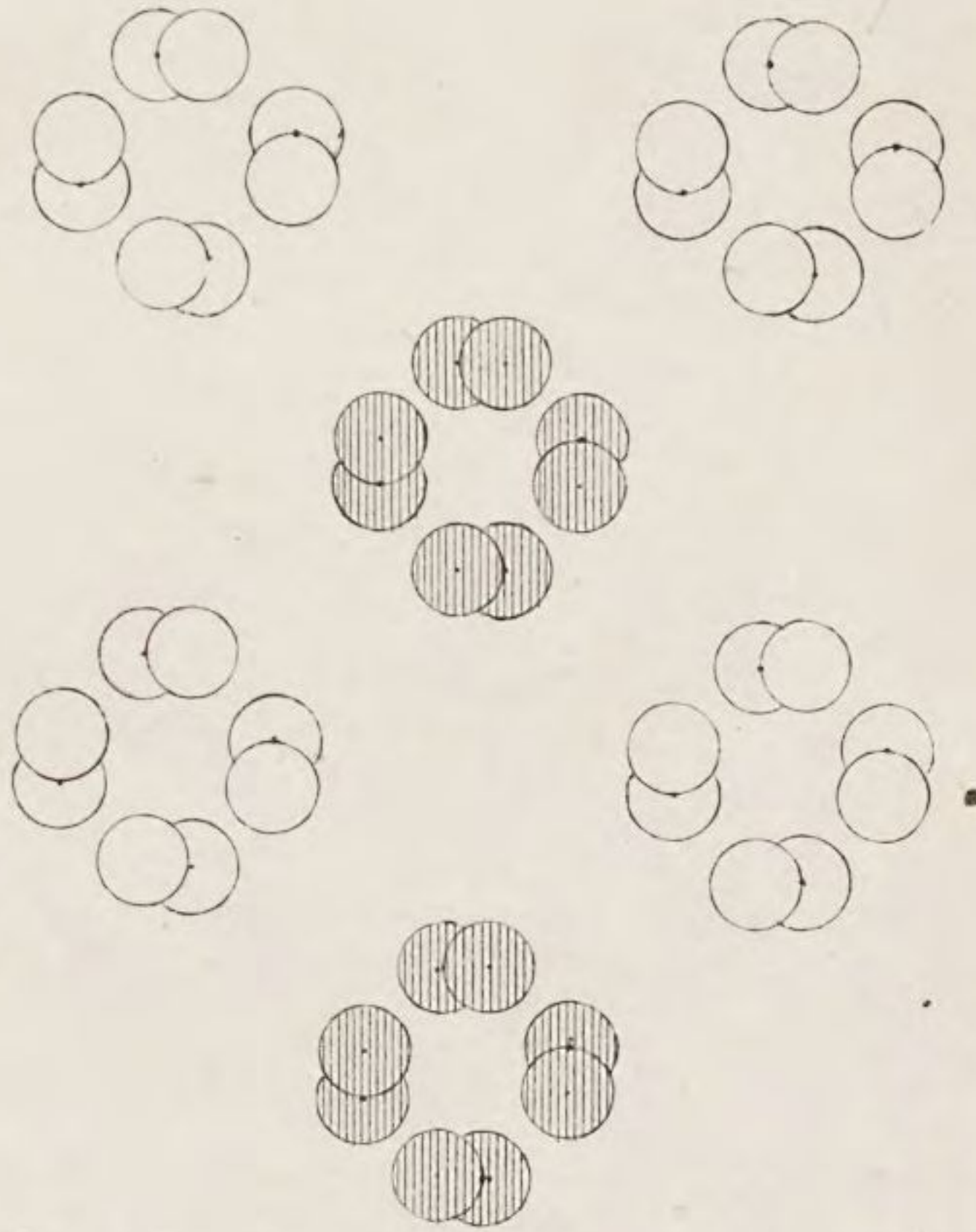
32. Rechtes

33. Linkes

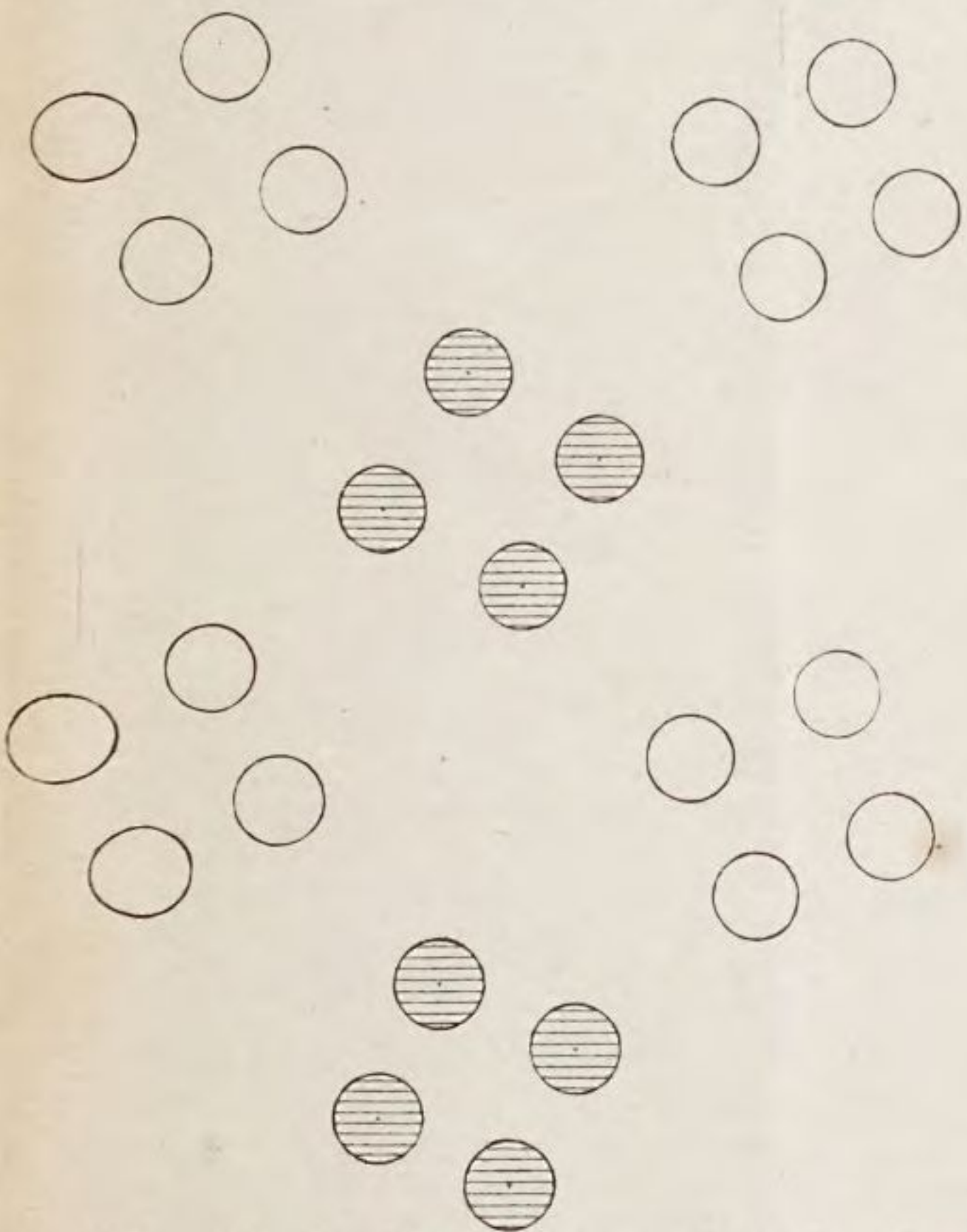
zusammengesetztes 4-punkt-schraubensystem. IV Bα.



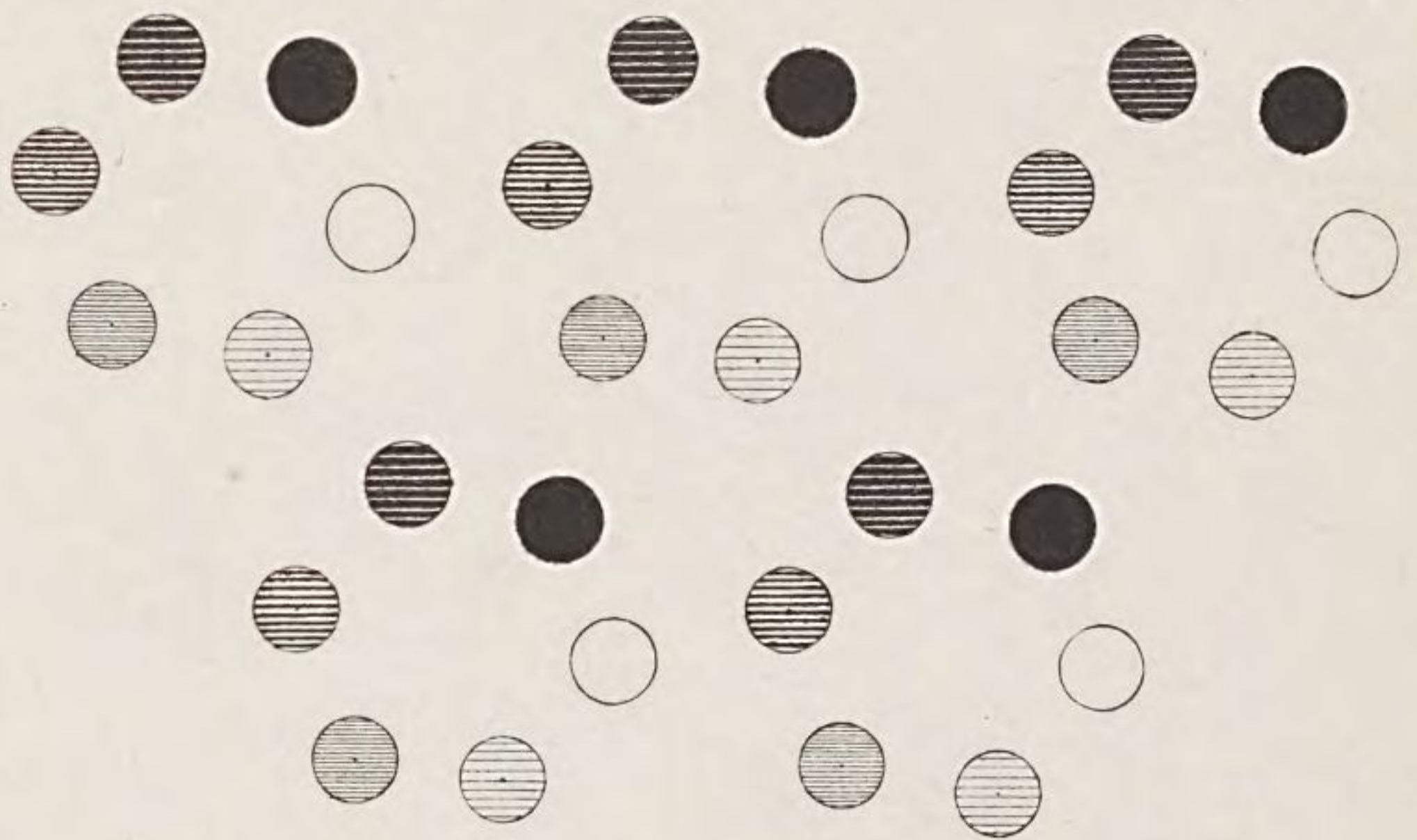
36. Zusammengesetztes Quadratsäulensystem. IV Bα



37. Zusammengesetztes Quadratoktaedersystem. IV Bα



41. Abwechselndes Quadratsäulensystem. IV Bβ.

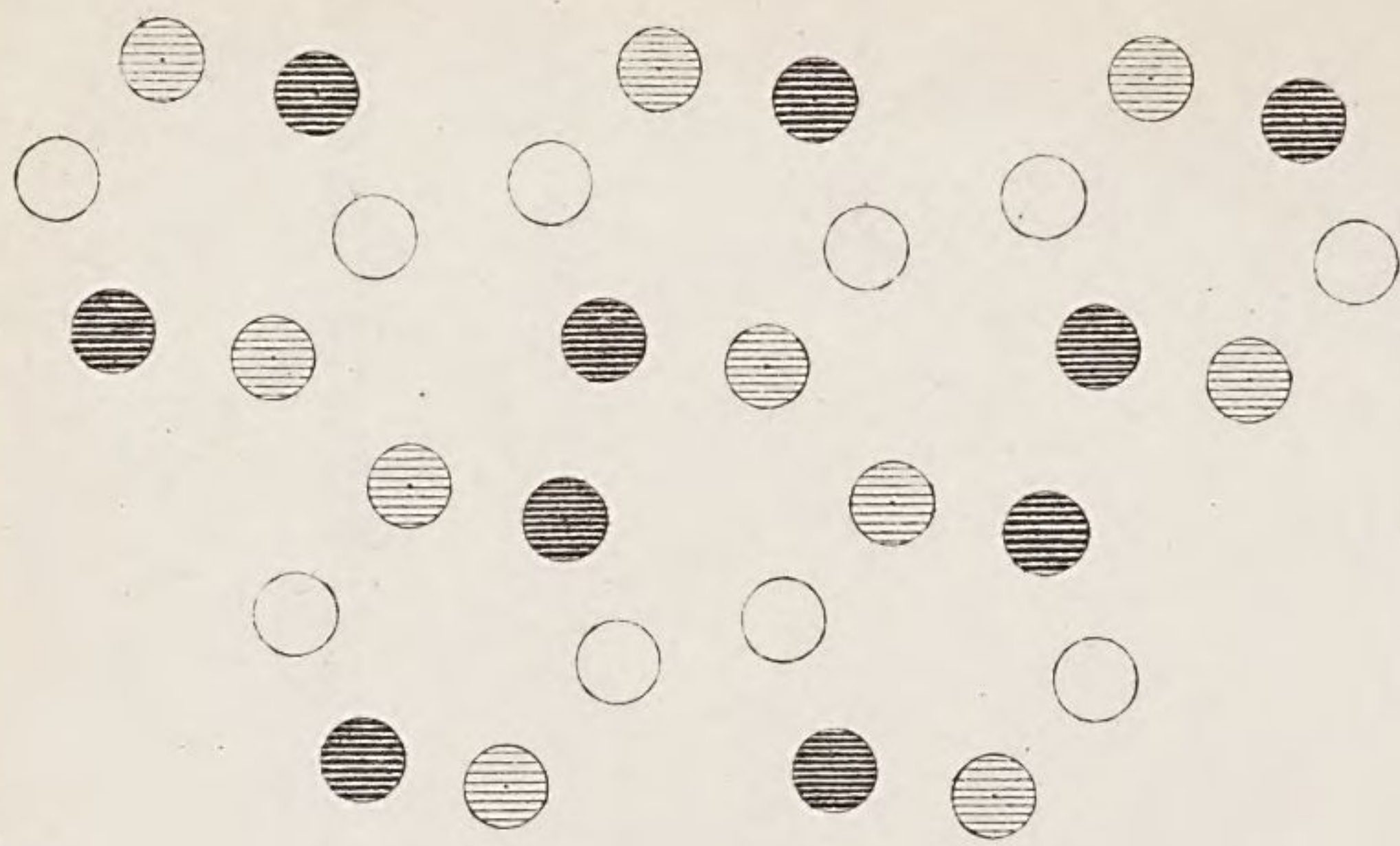


42. Rechtes

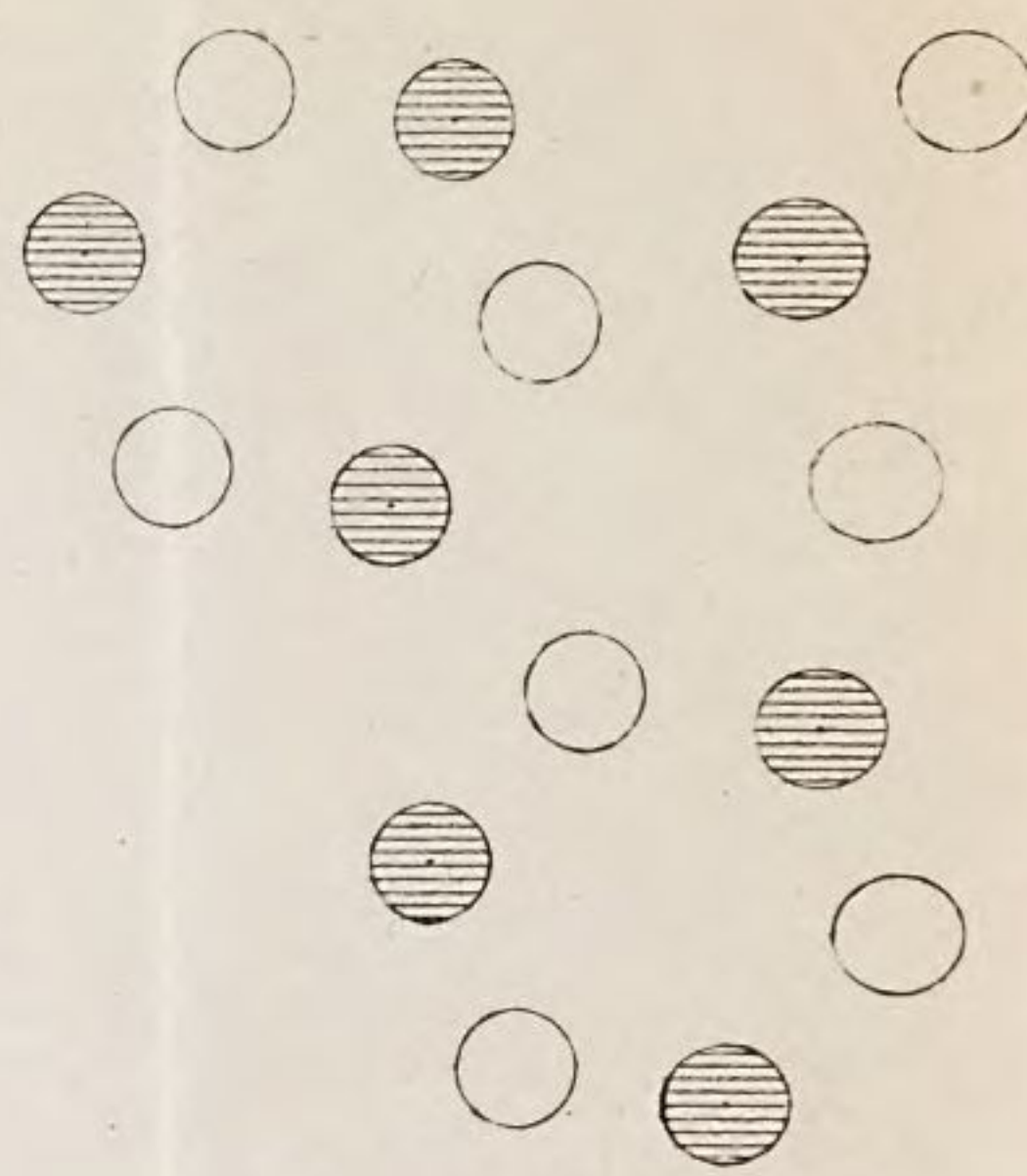
43. Linkes

6-punktschraubensystem.

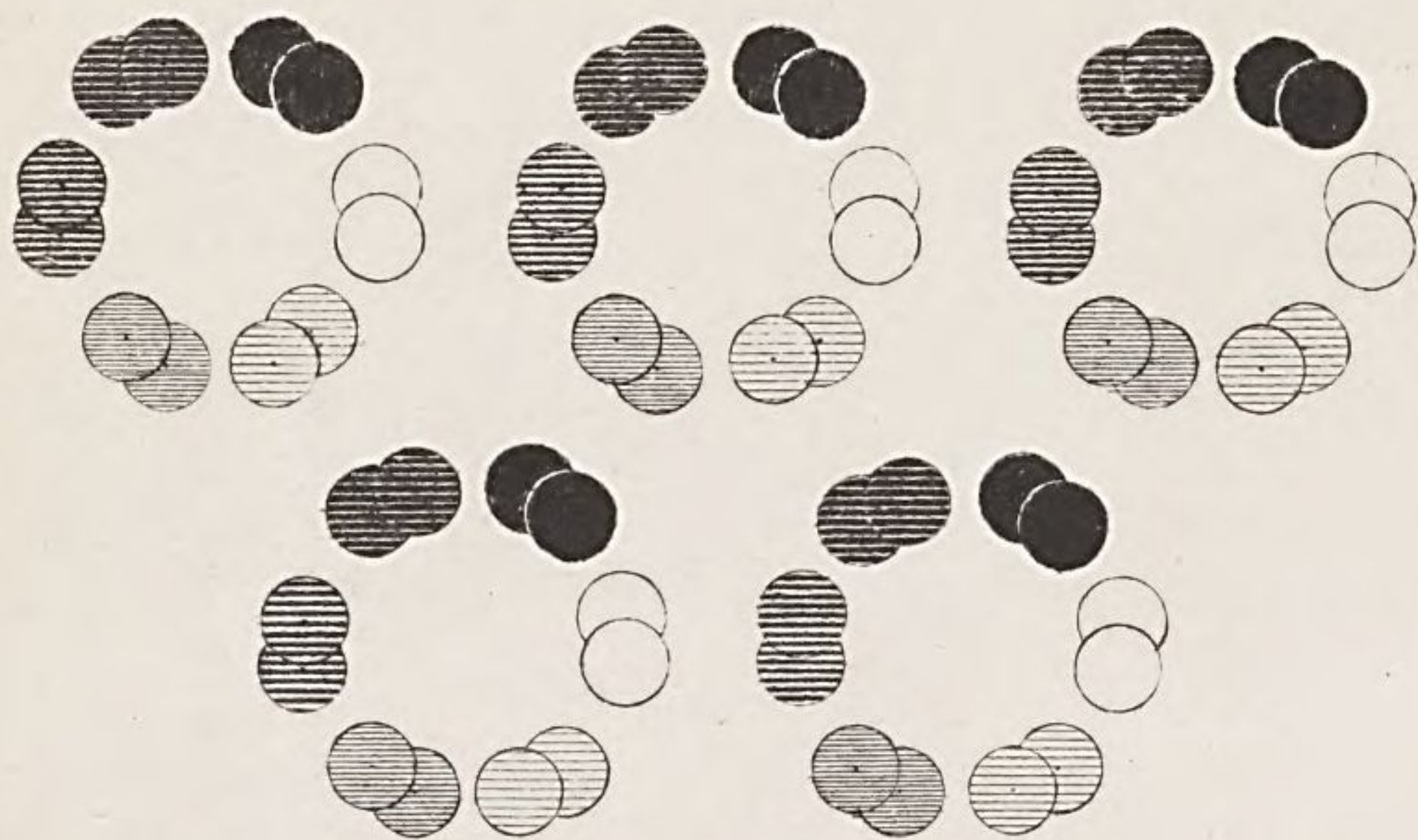
VA.



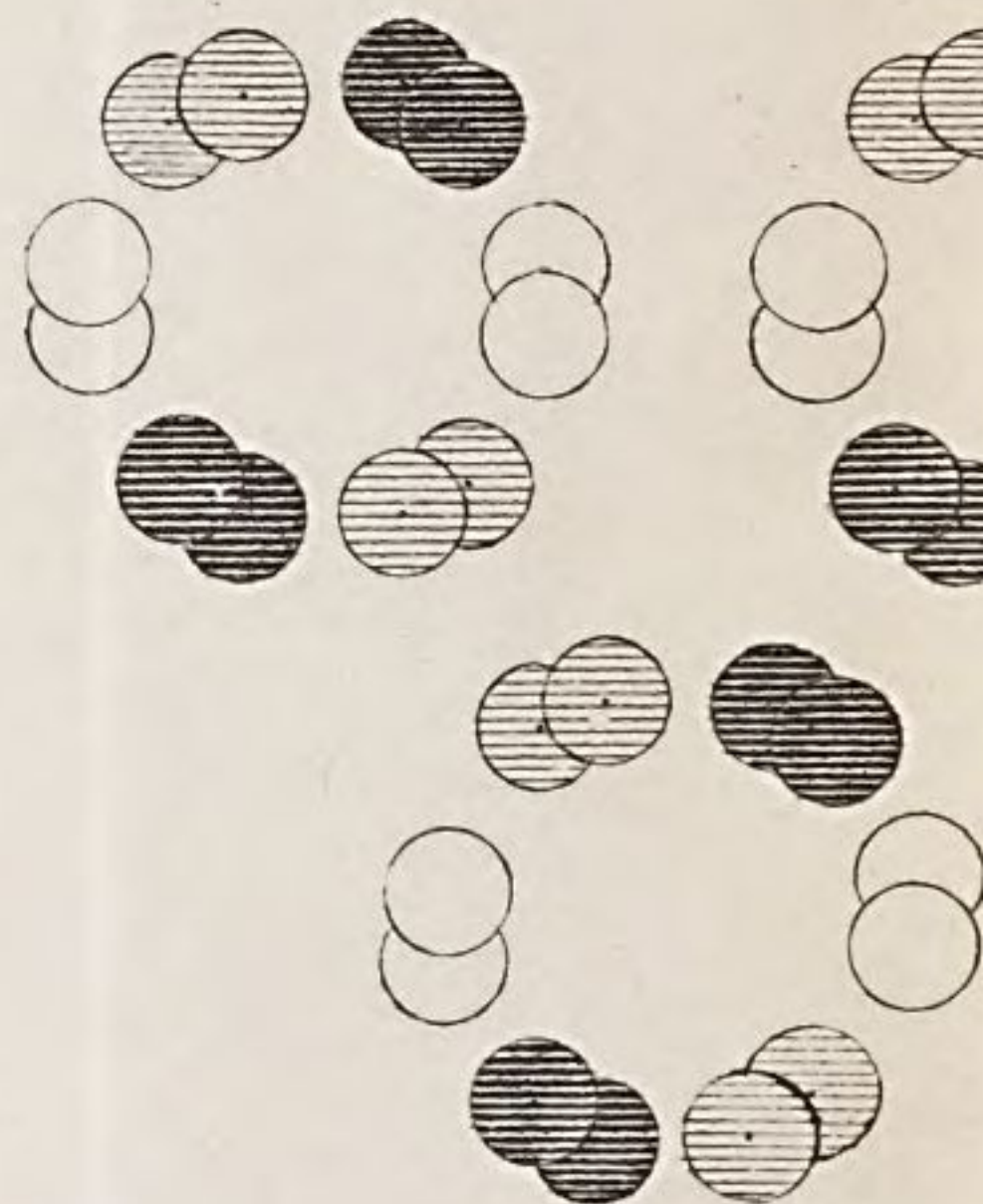
44. *Rechtes* } 2-gängiges 6-punktschraubensystem. VA.
45. *Linkes* }



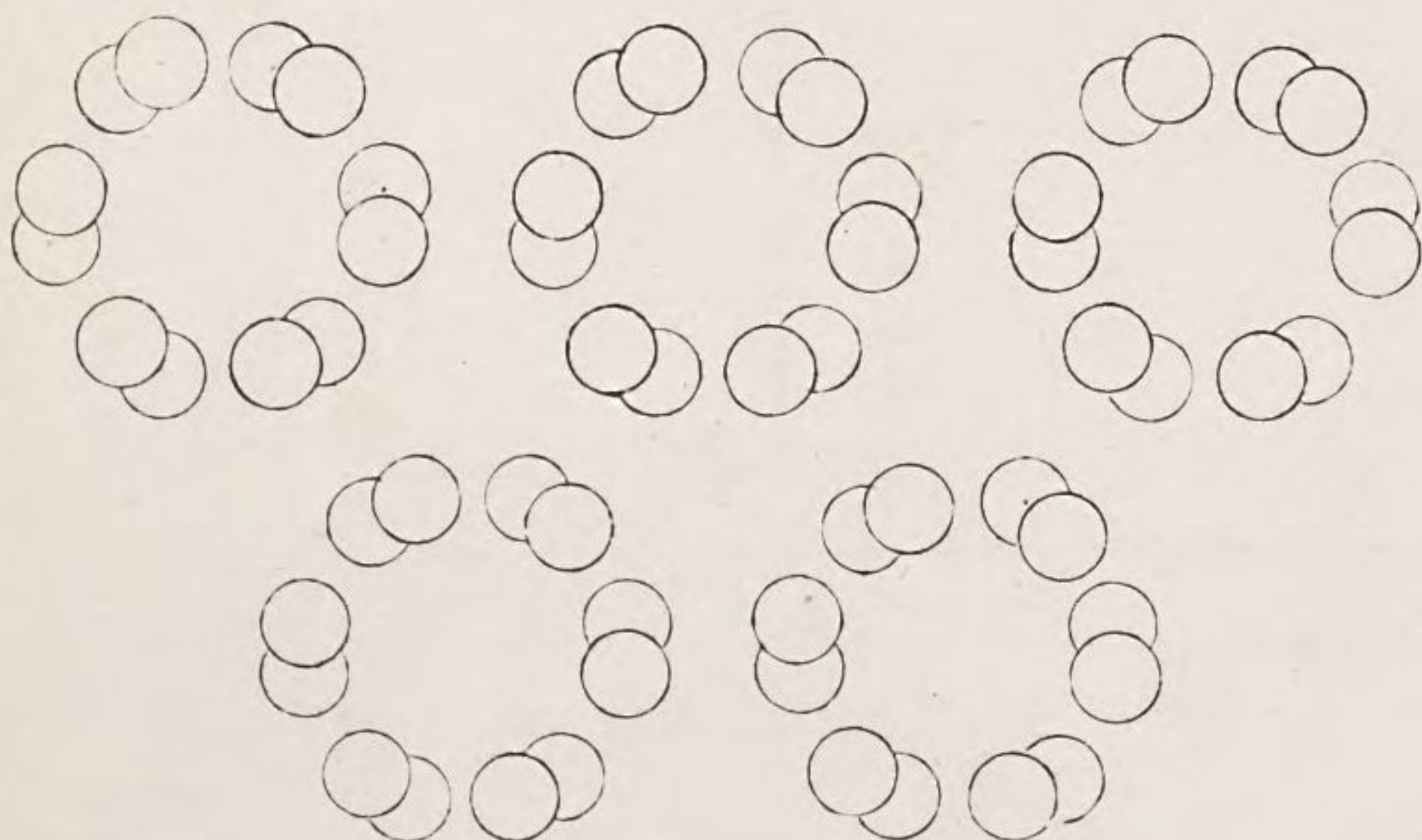
46. 3-gängiges 6-punktschraubensystem.



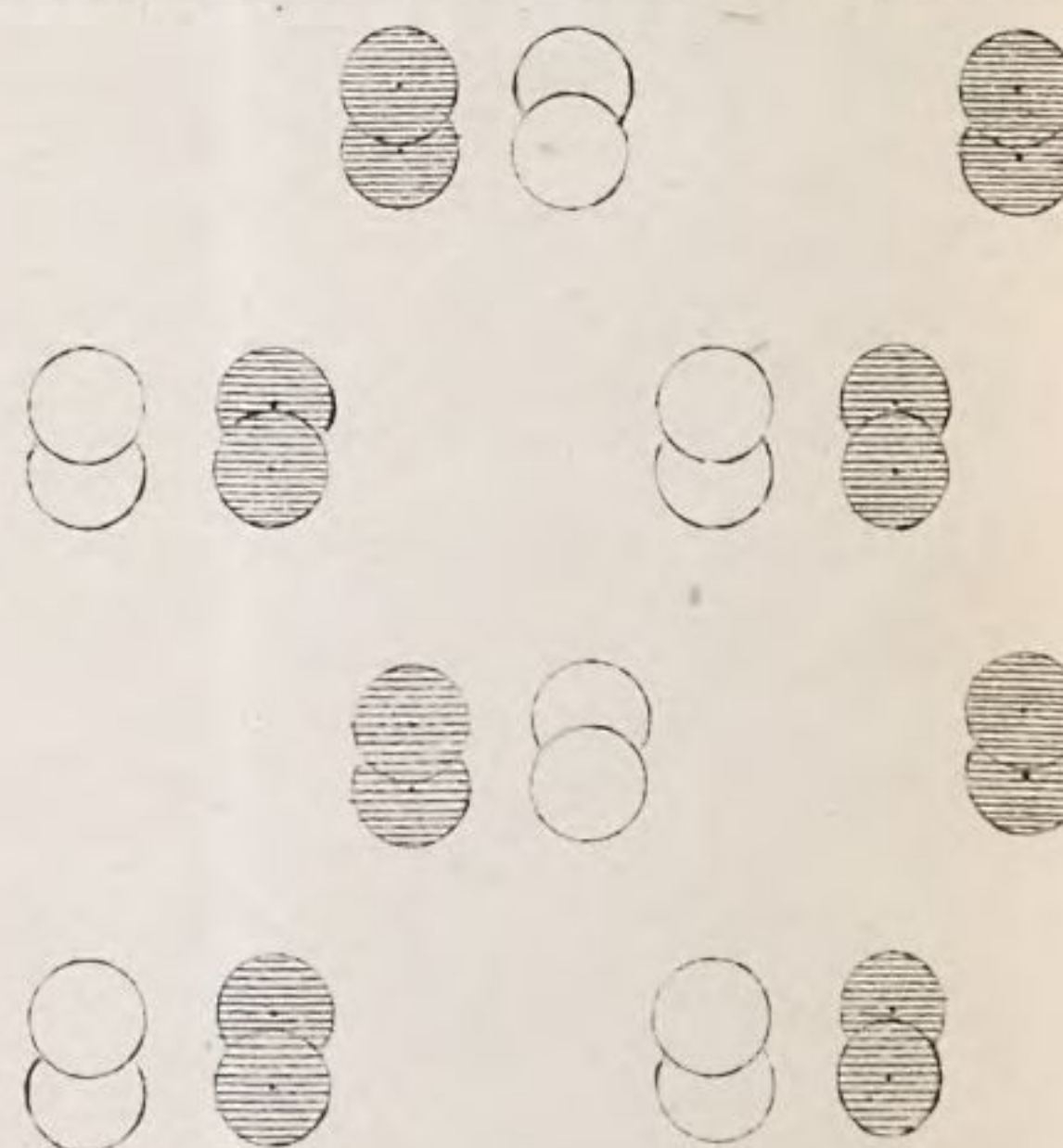
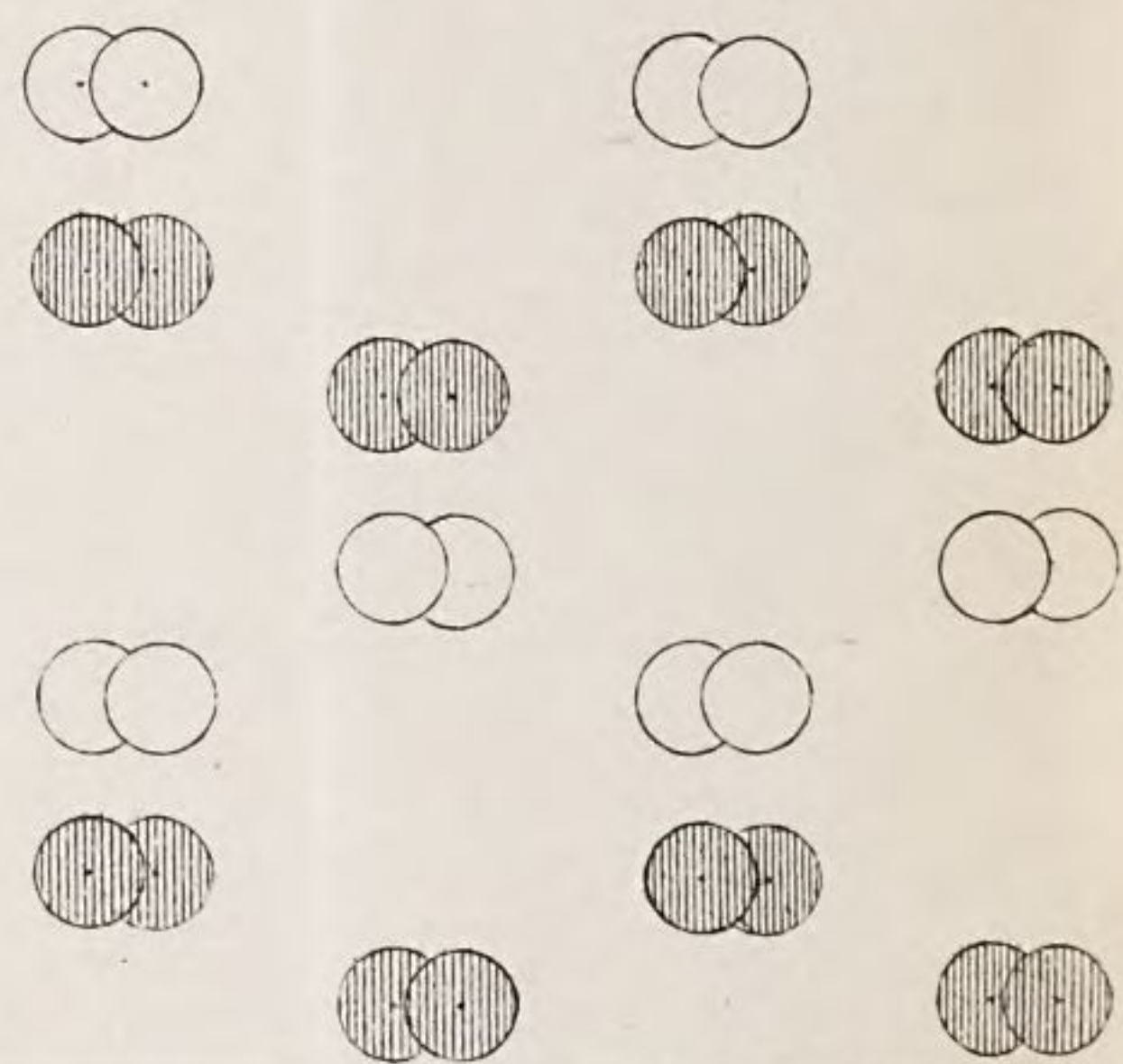
48. *Rechtes* } Zusammengesetztes 6-punktschraubensystem. VB.
49. *Linkes* }

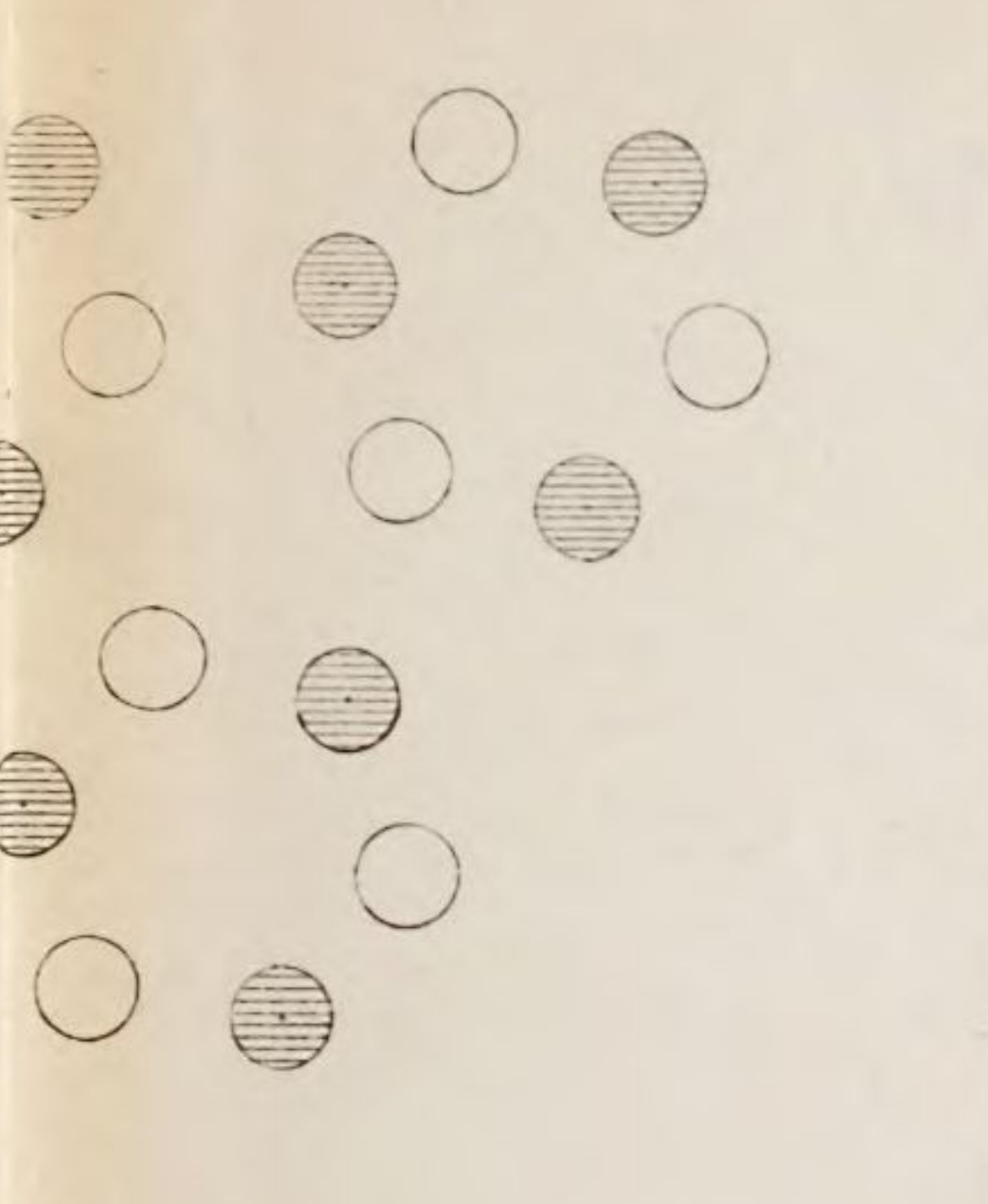
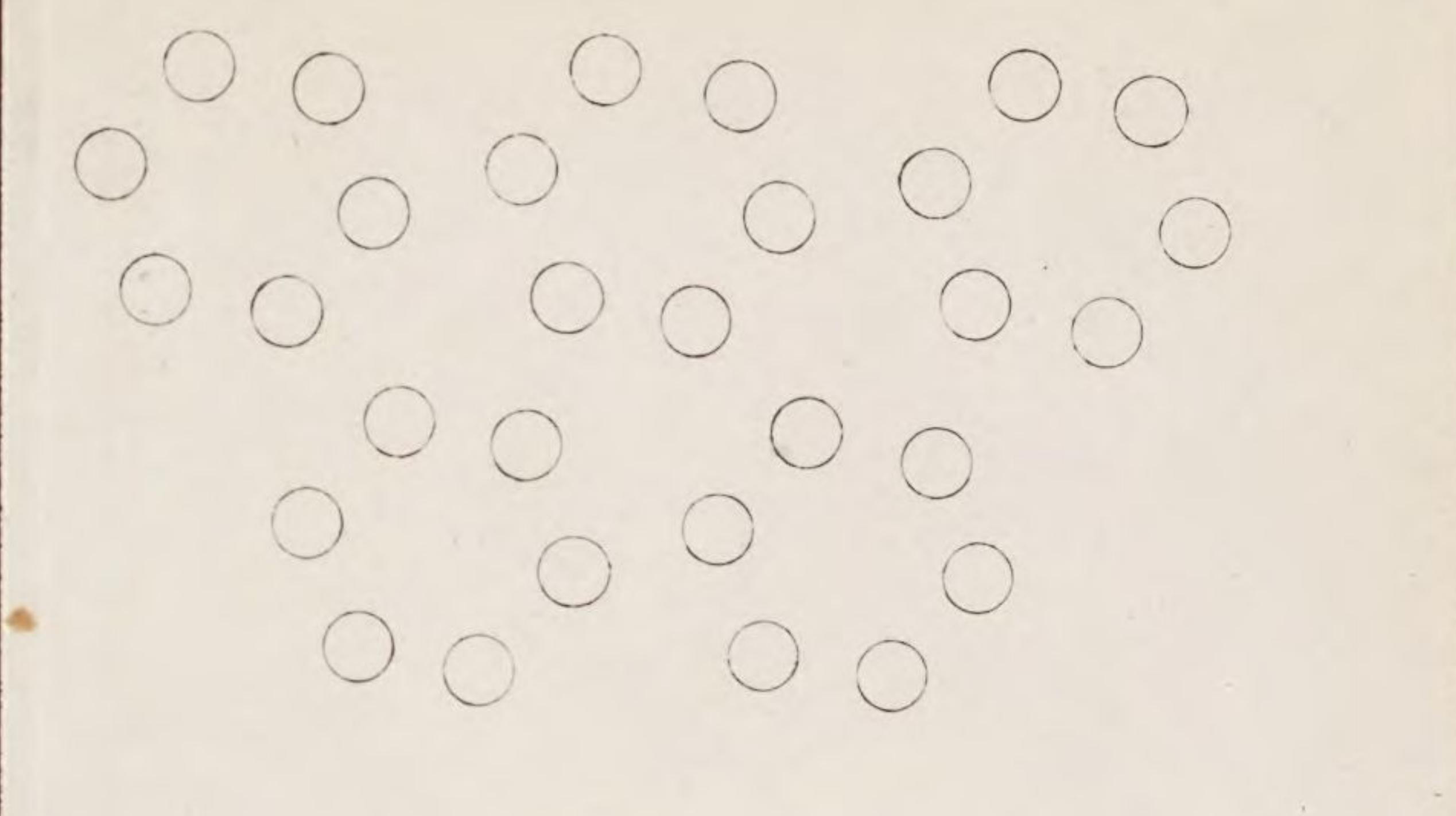
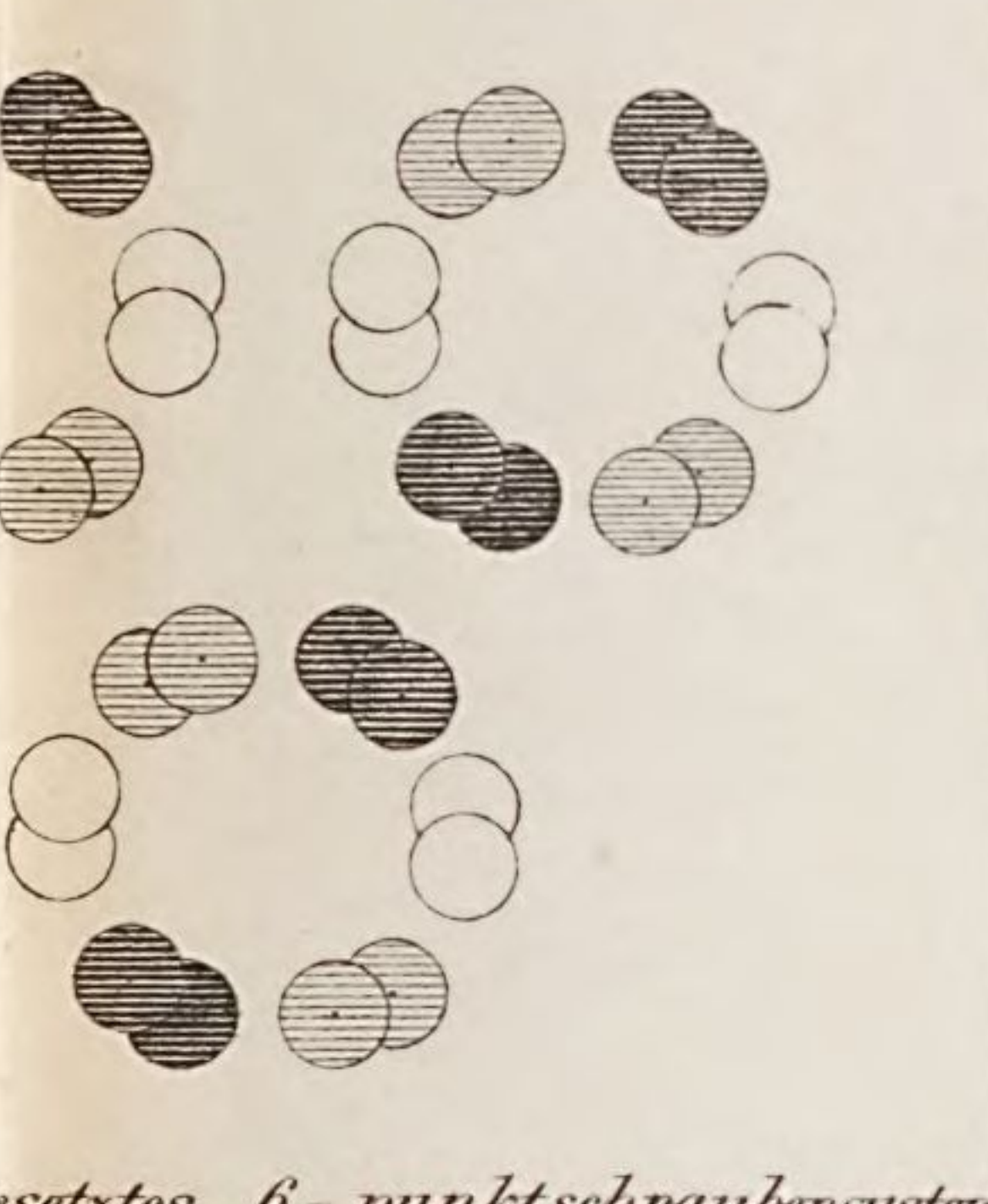
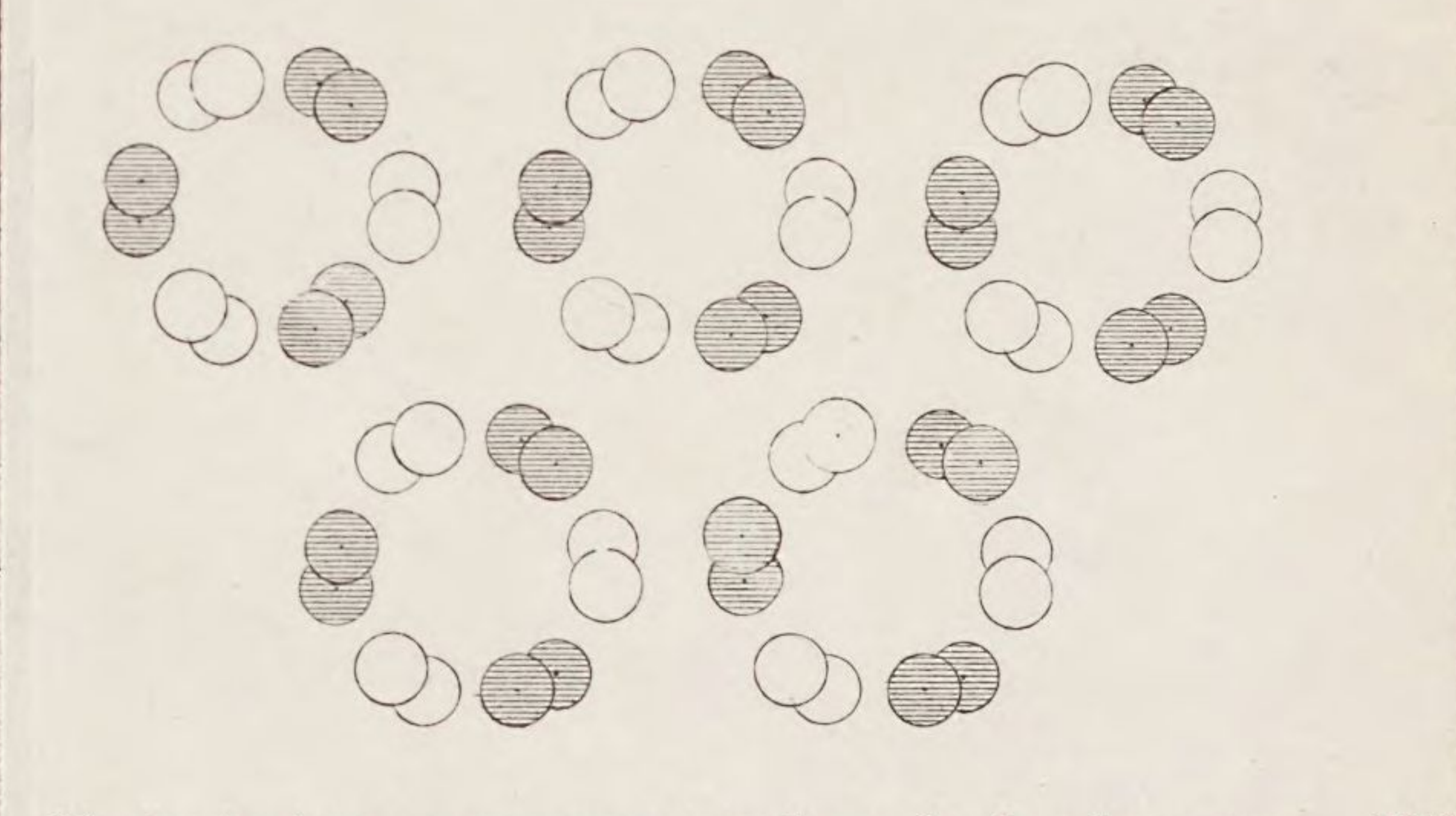
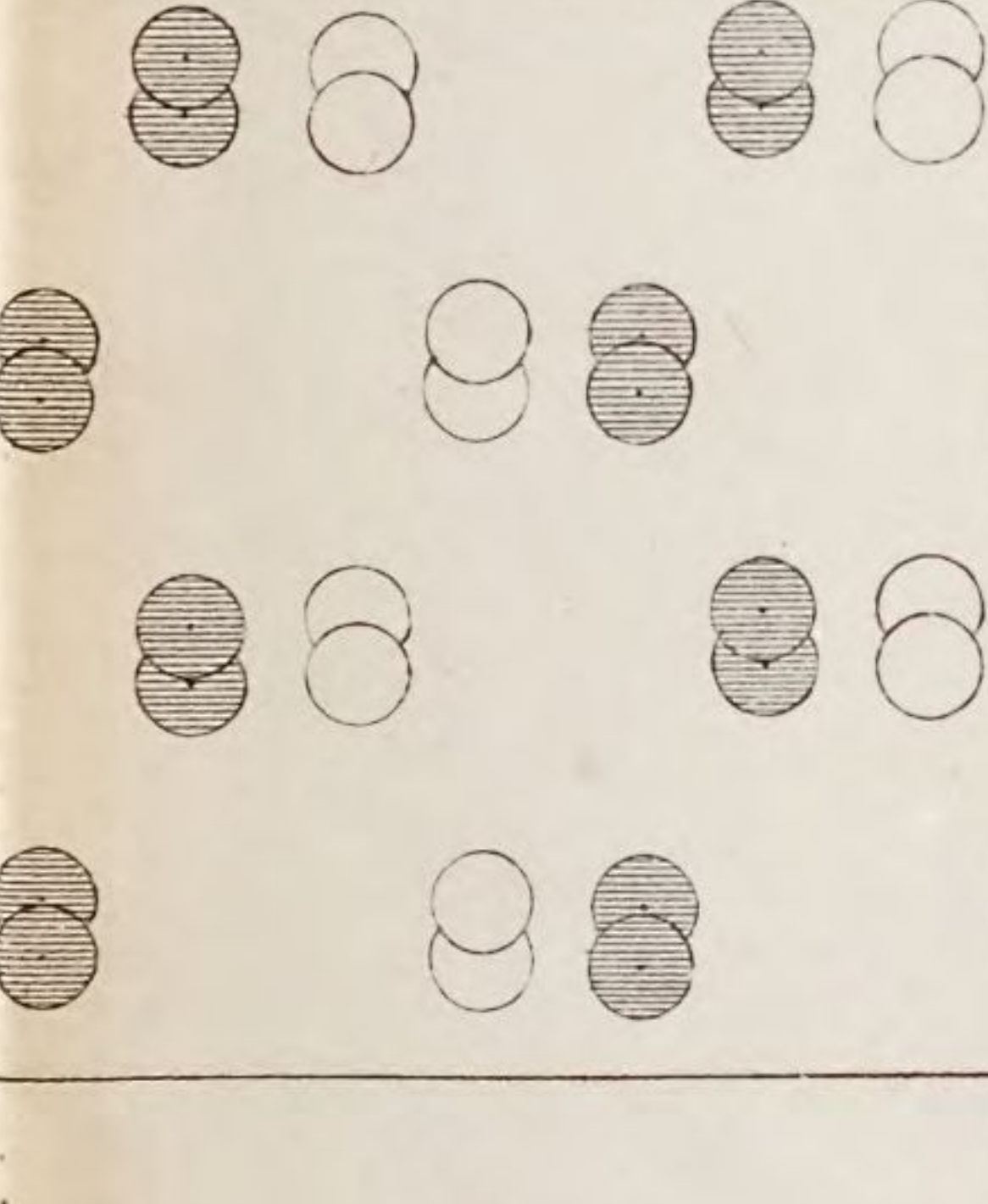
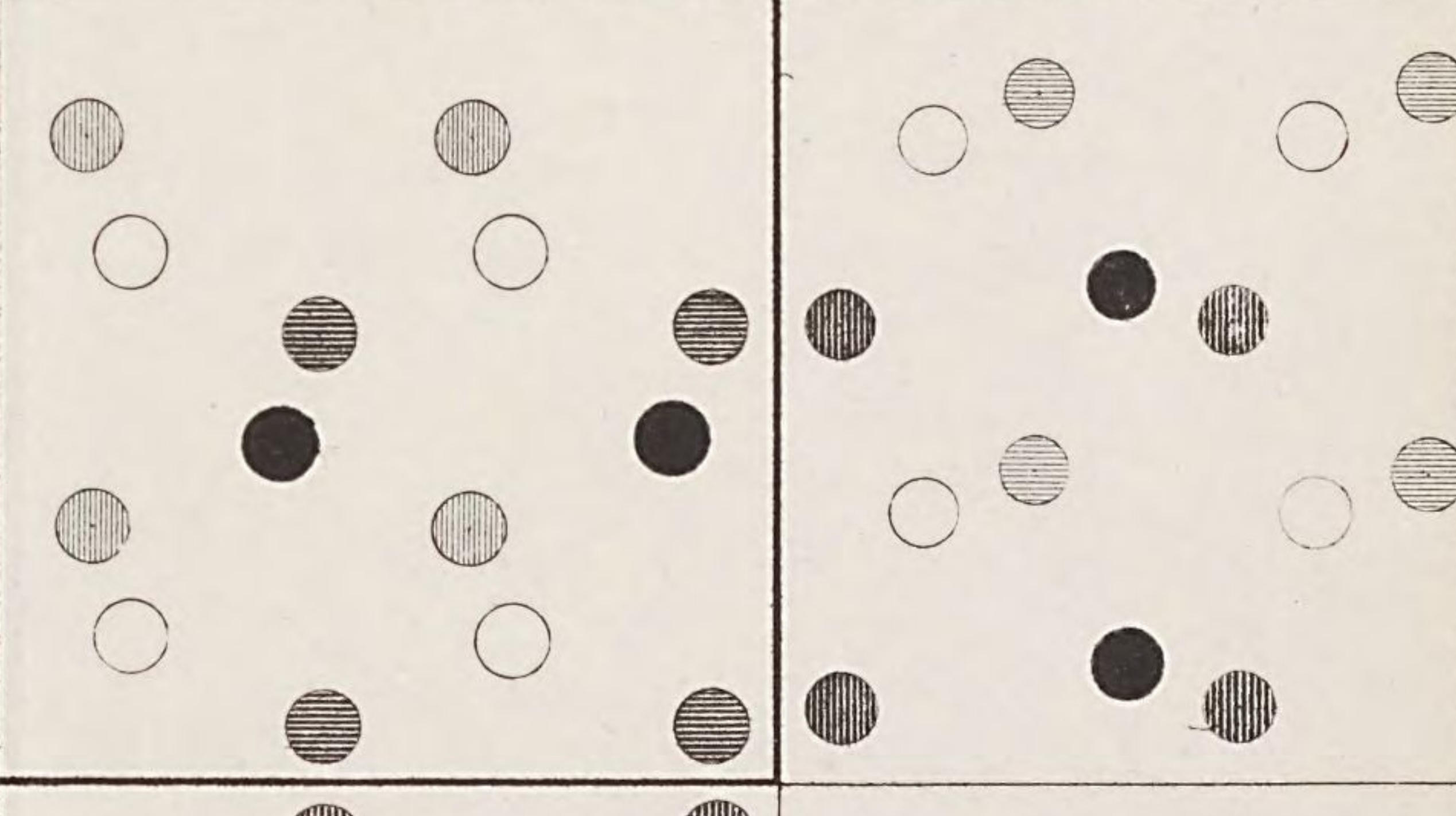


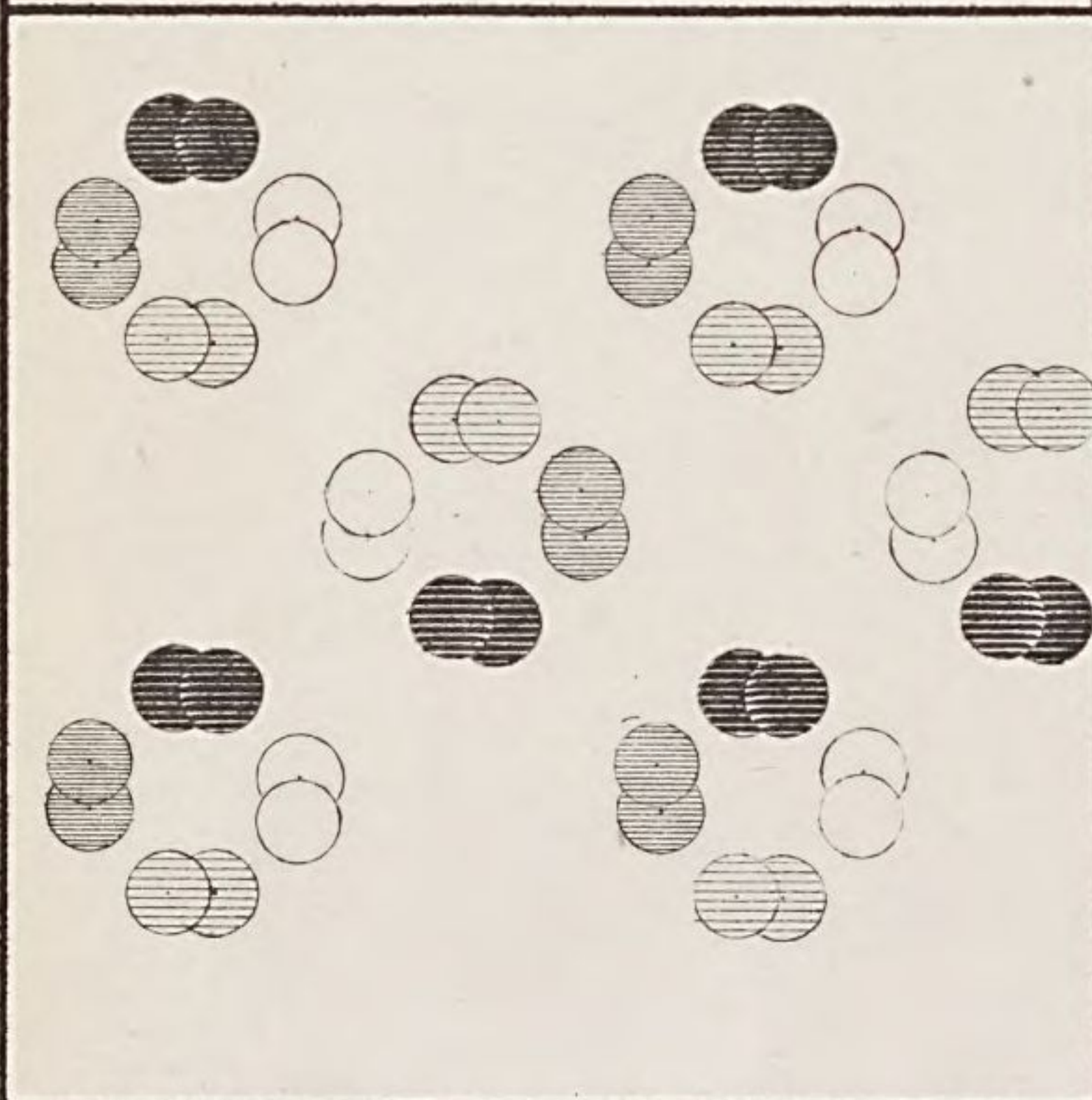
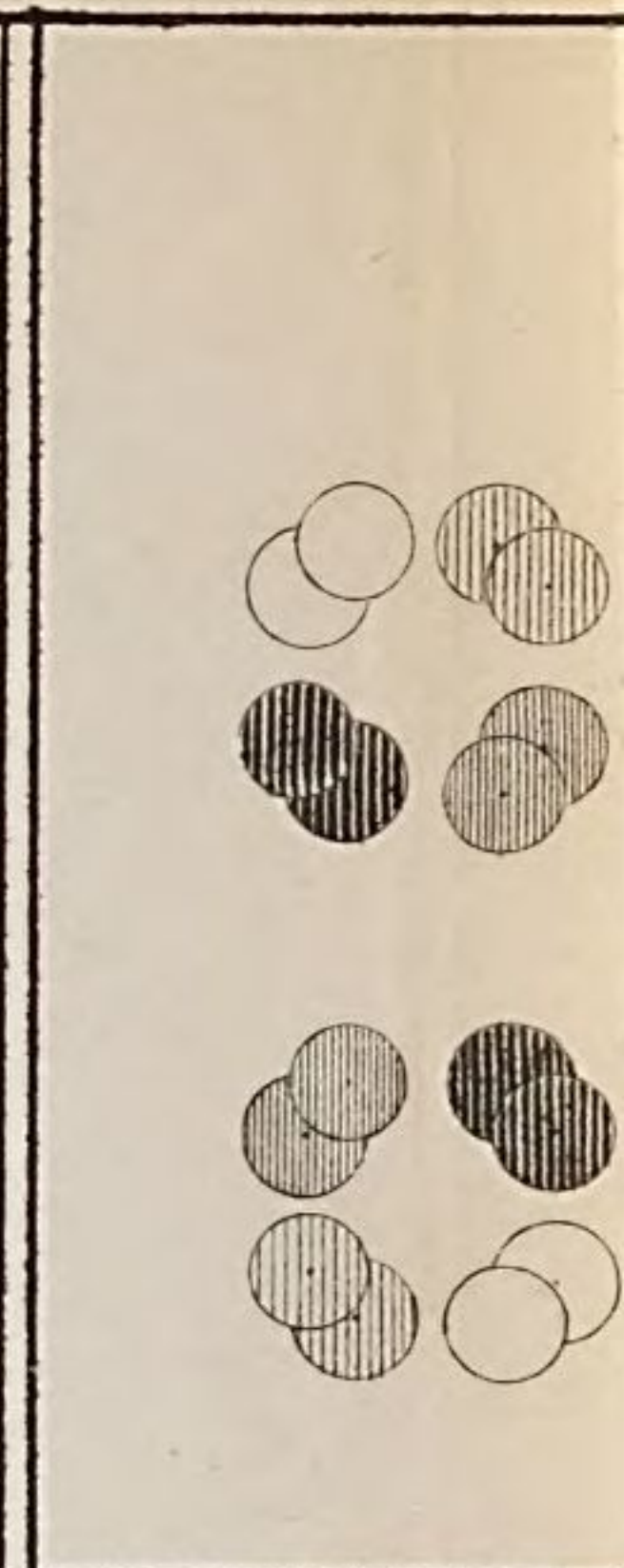
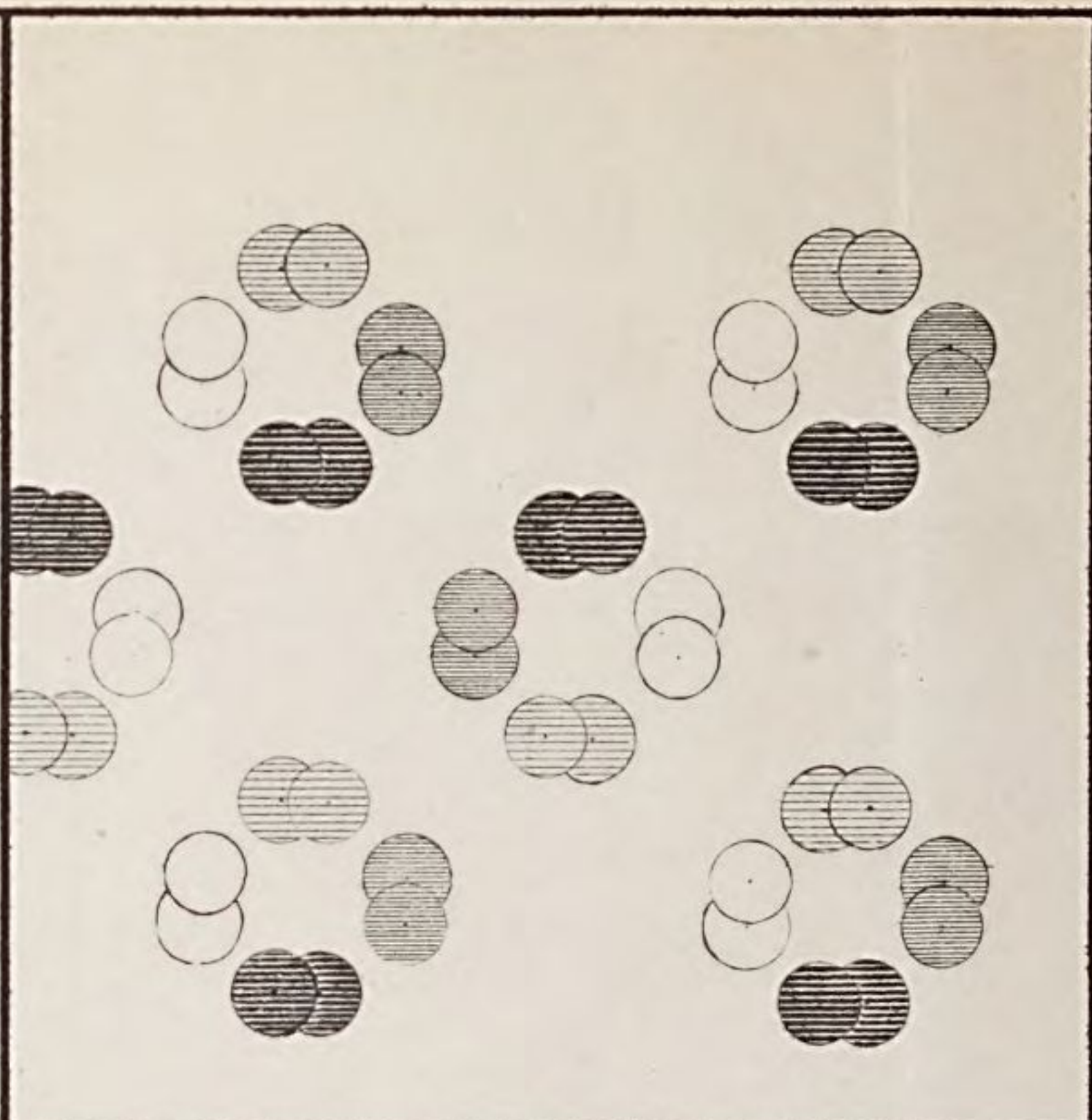
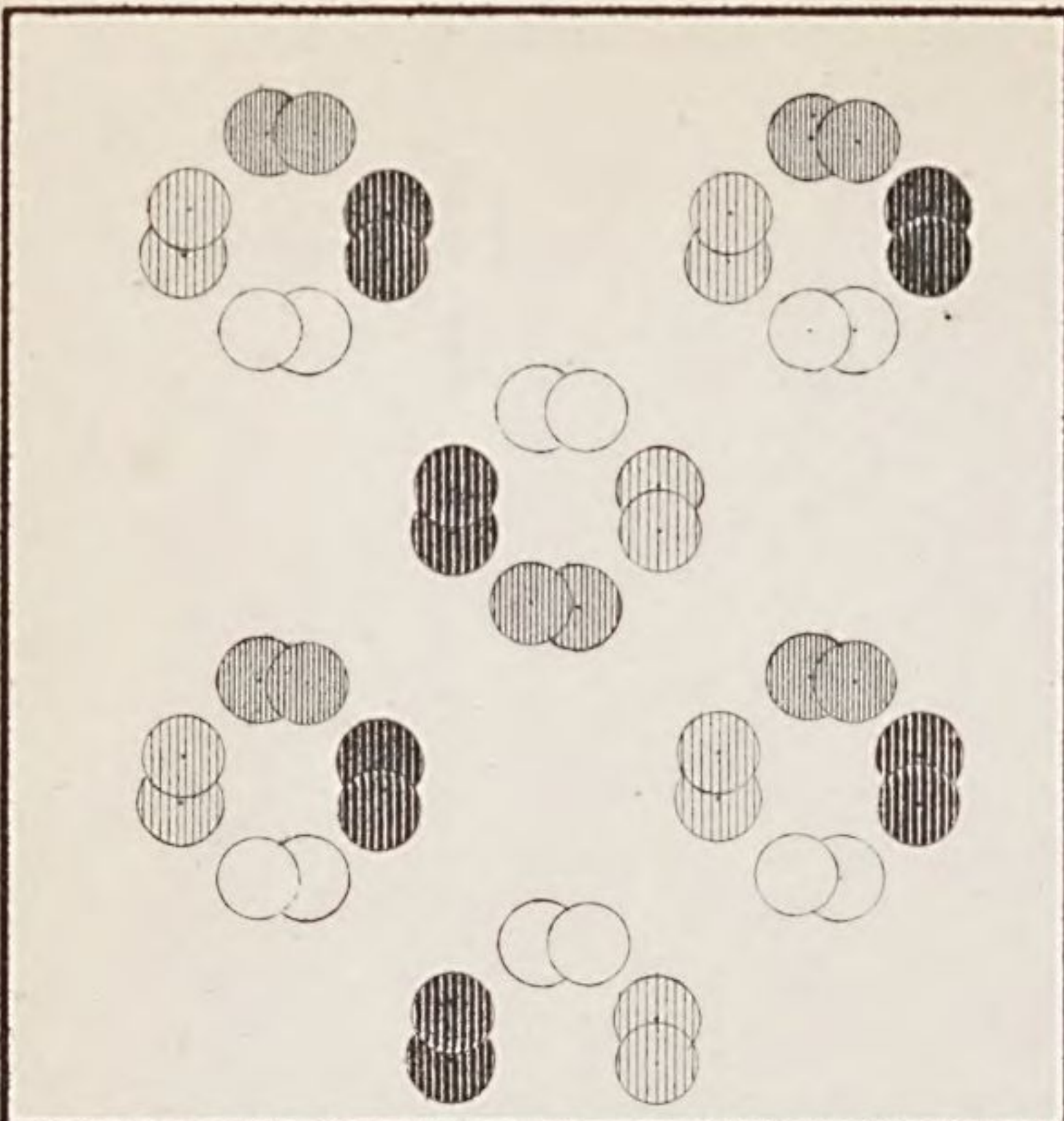
50. *Rechtes* } 2-gängiges zusammengesetztes 6-punktschraubensystem.
51. *Linkes* }



53. Zusammengesetztes Hexagonalsäulensystem. VB.



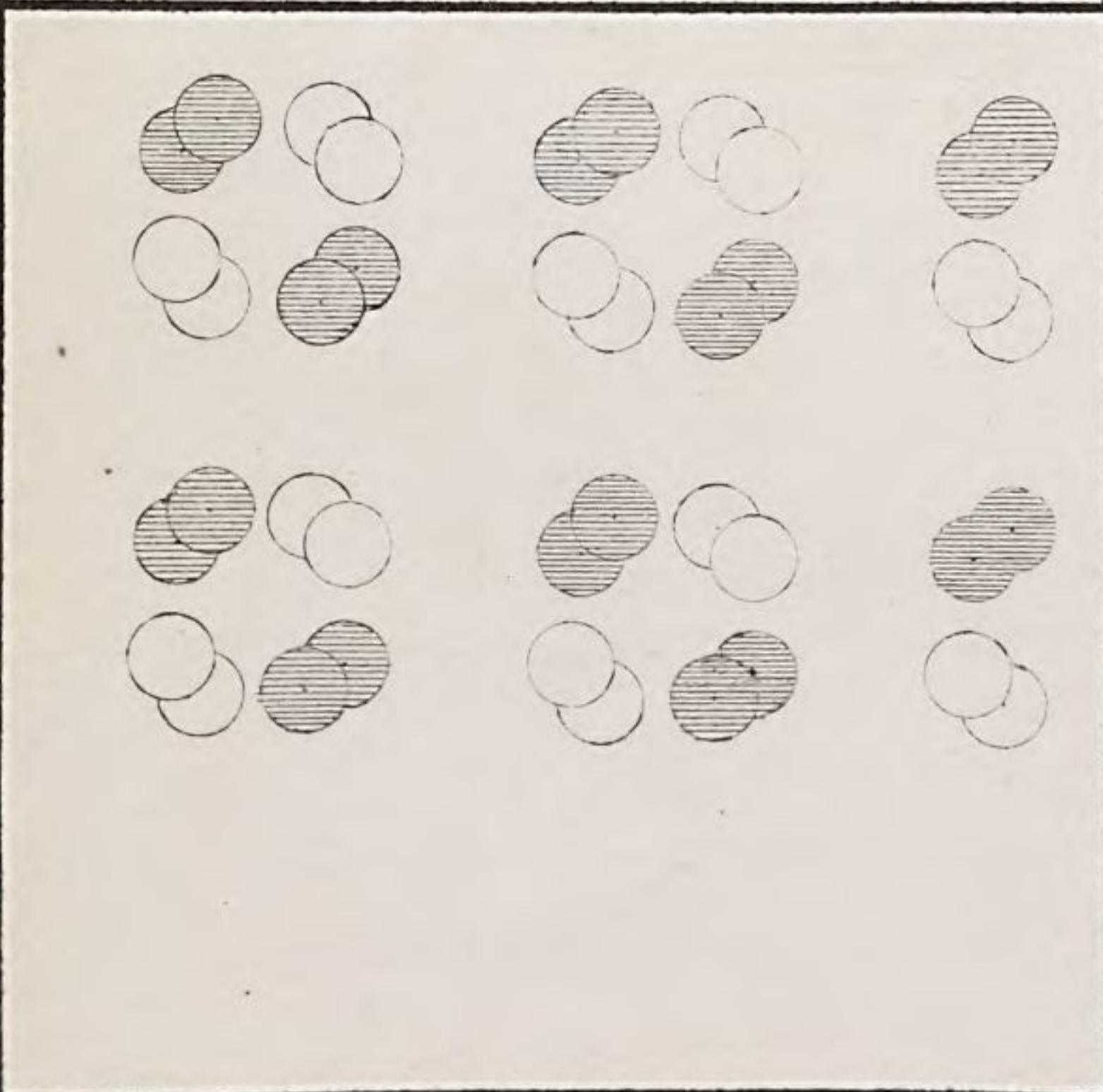
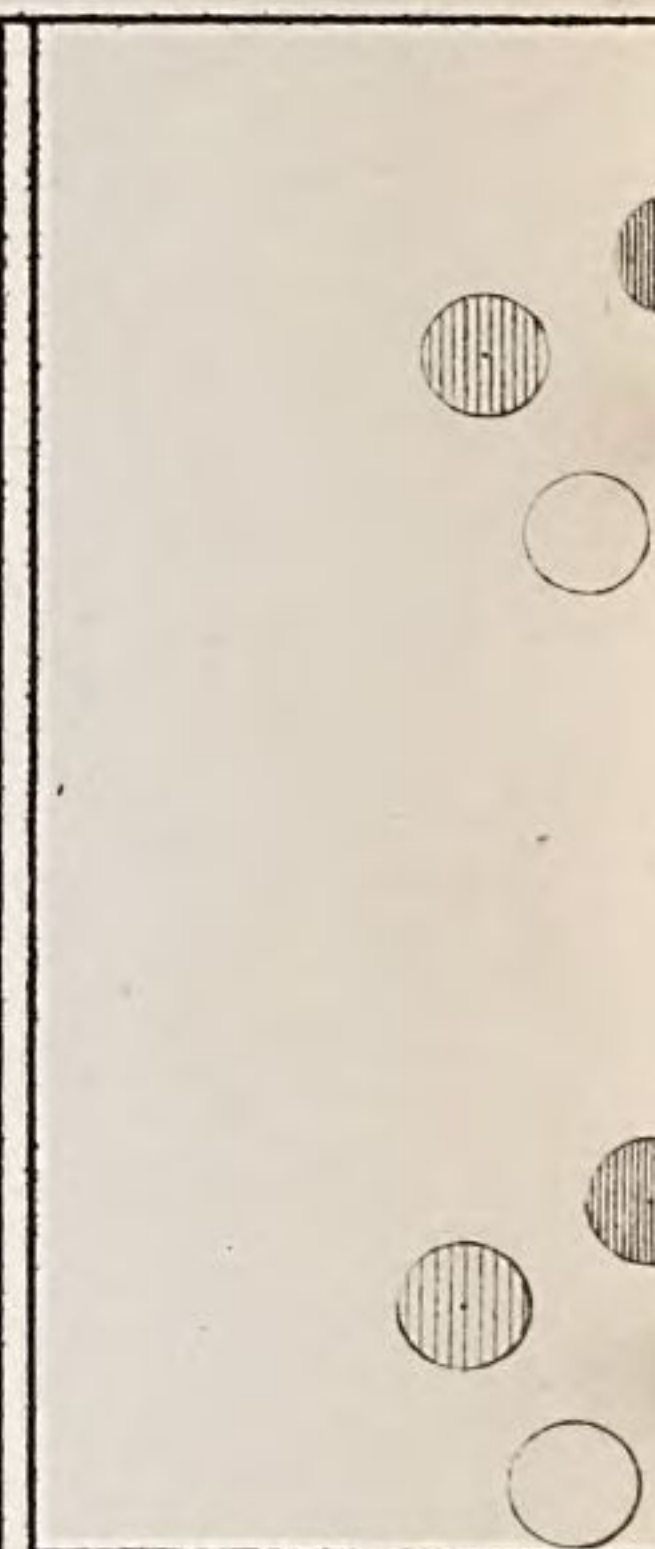
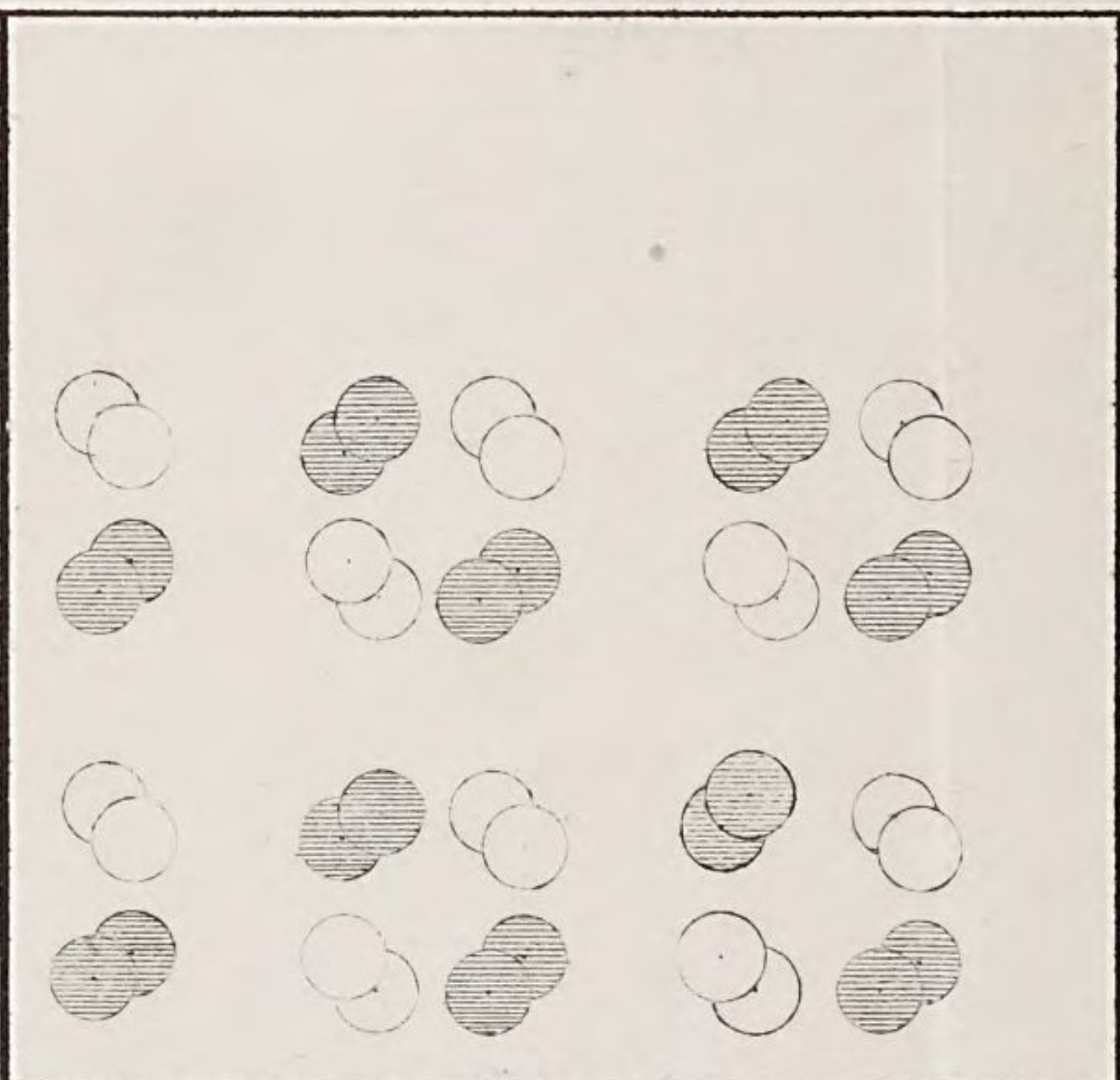
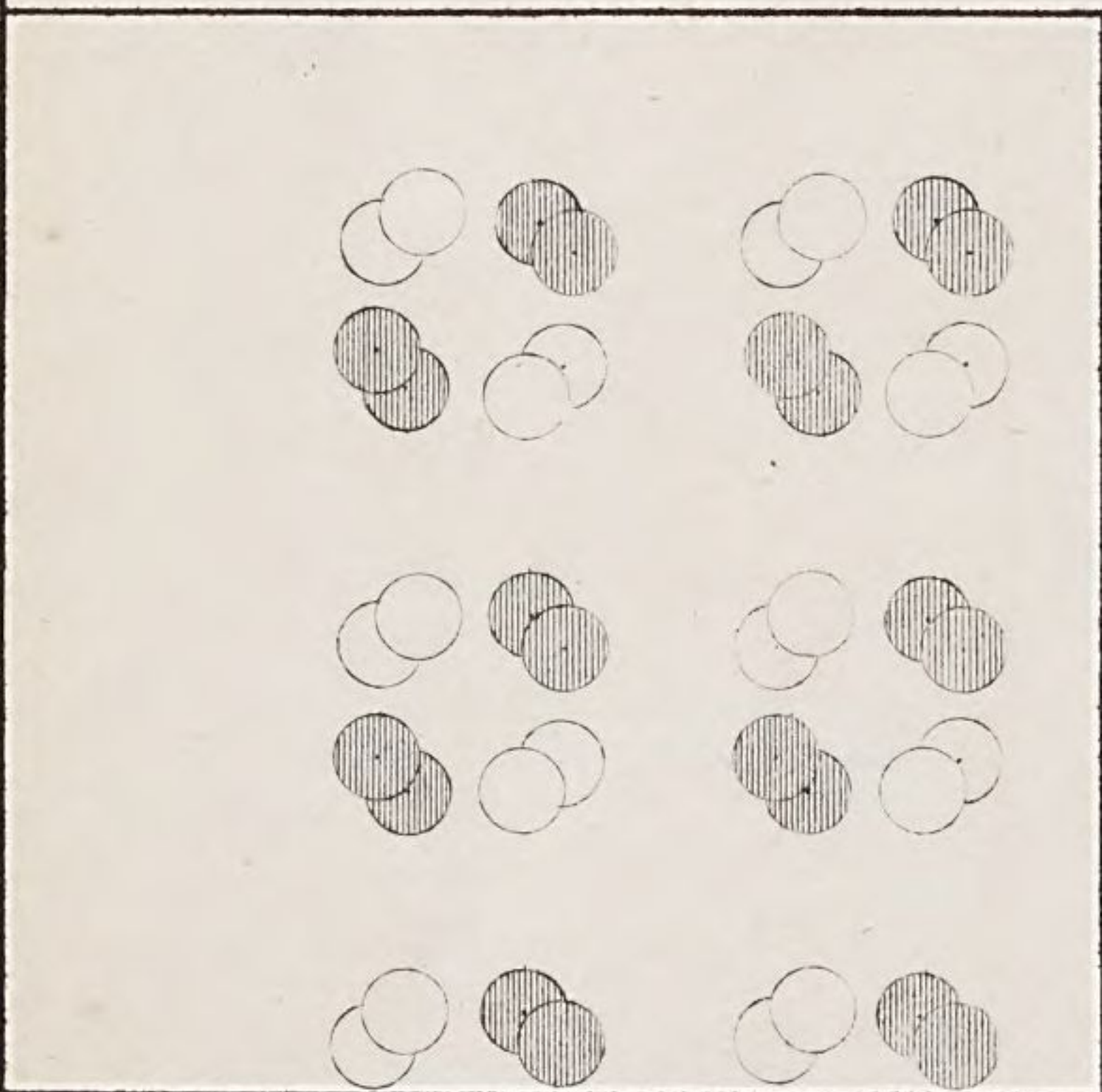
 <i>System.</i> VA.	 47. <i>Hexagonalsäulensystem.</i> VA.
 <i>zusammengesetztes 6 = punktschraubensystem.</i> VB.	 52. <i>3-gängiges zusammengesetztes 6 = punktschraubensystem.</i> VB.
 57. <i>Reguläres zusammengesetztes 2 = punktschraubensystem.</i> VI.	 58. <i>Reguläres abwechselndes 2 = punktschraubensystem.</i> VI.



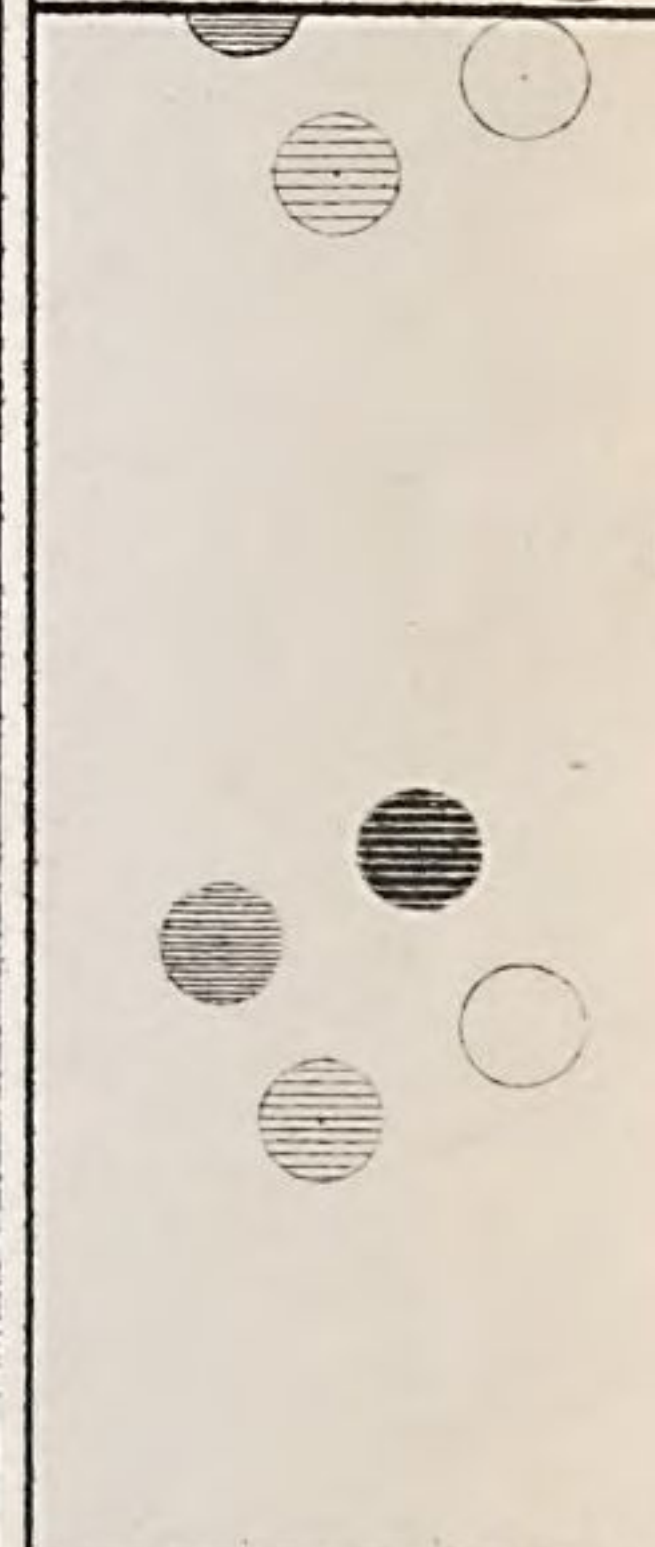
62. Reguläres Gegenschraubensystem
erster Art.



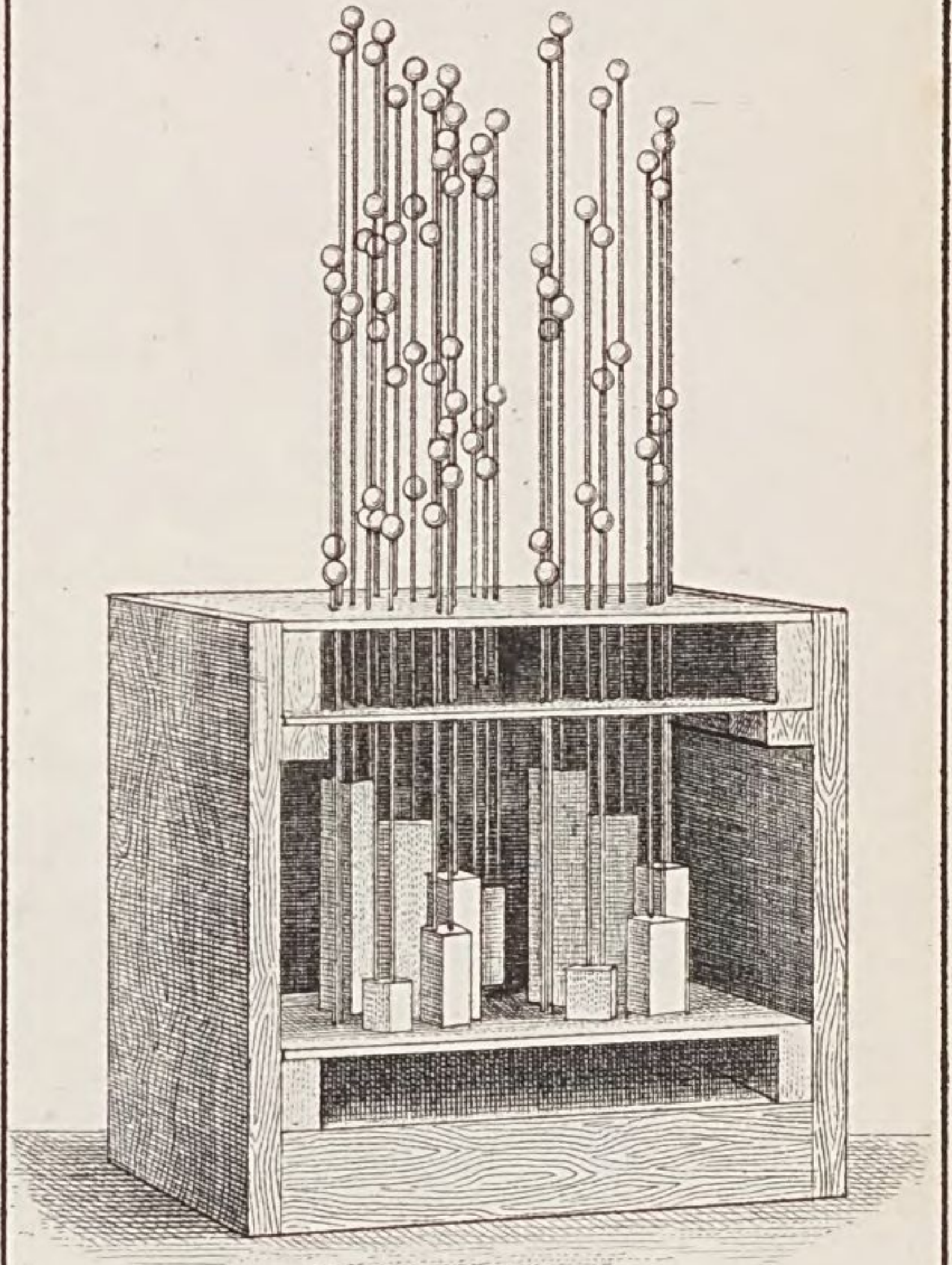
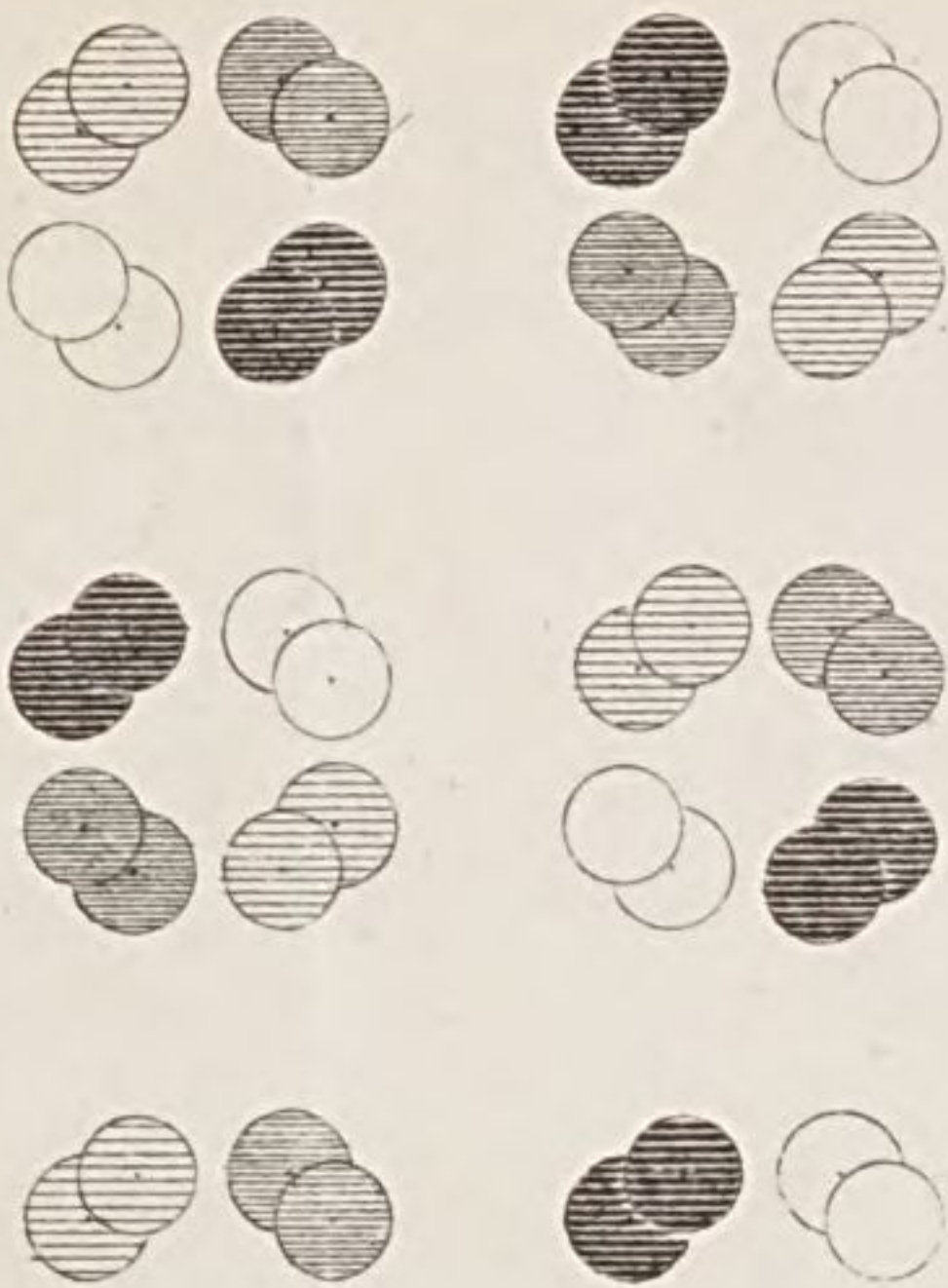
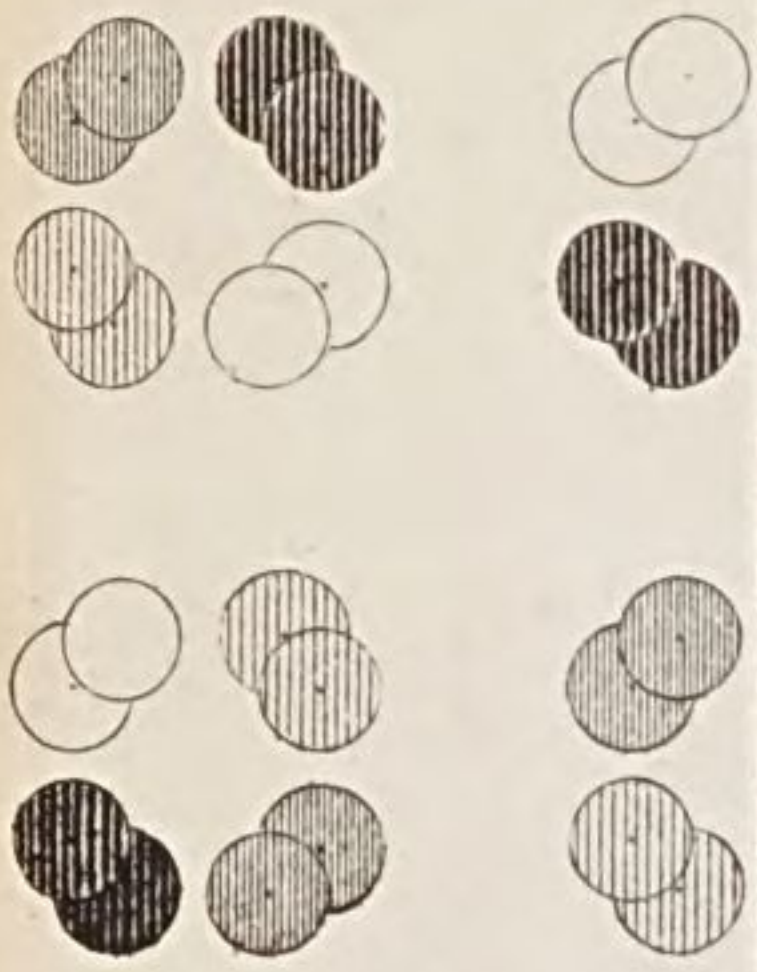
VII.



64. Reguläres 2-gängiges 4-punkt-
schraubensystem.

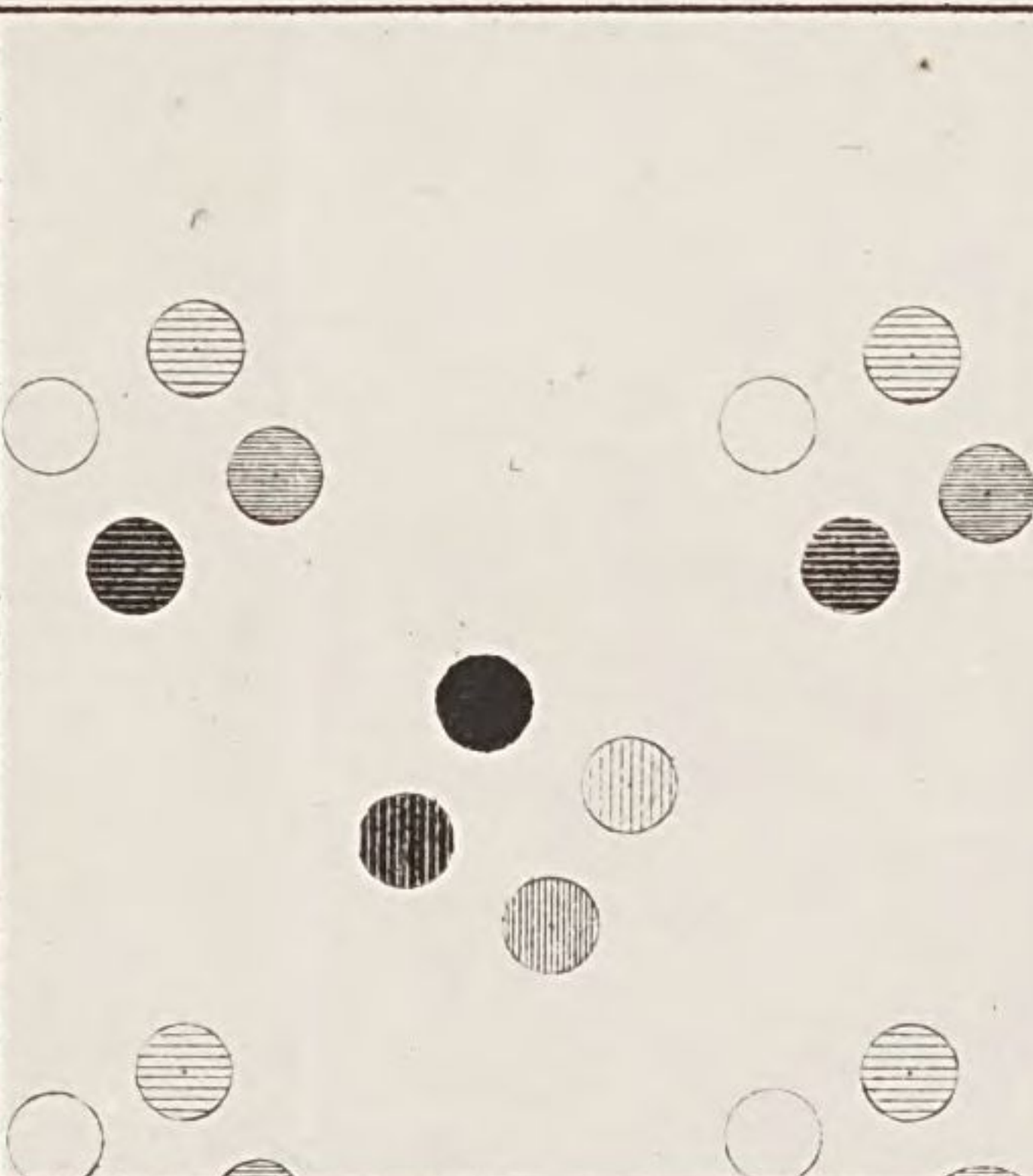
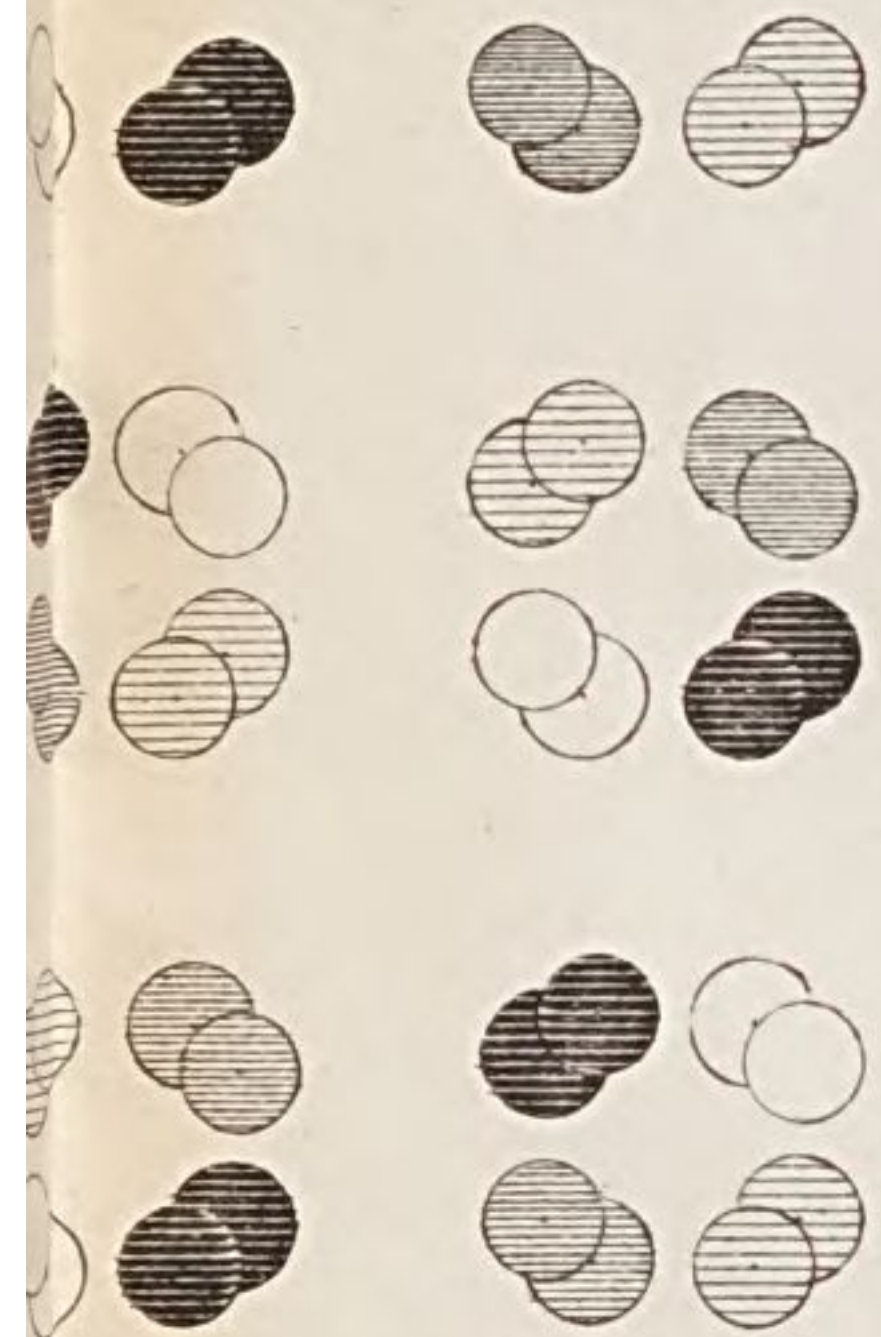


VII.



63. Reguläres Gegenschraubensystem zweiter Art.

VII.

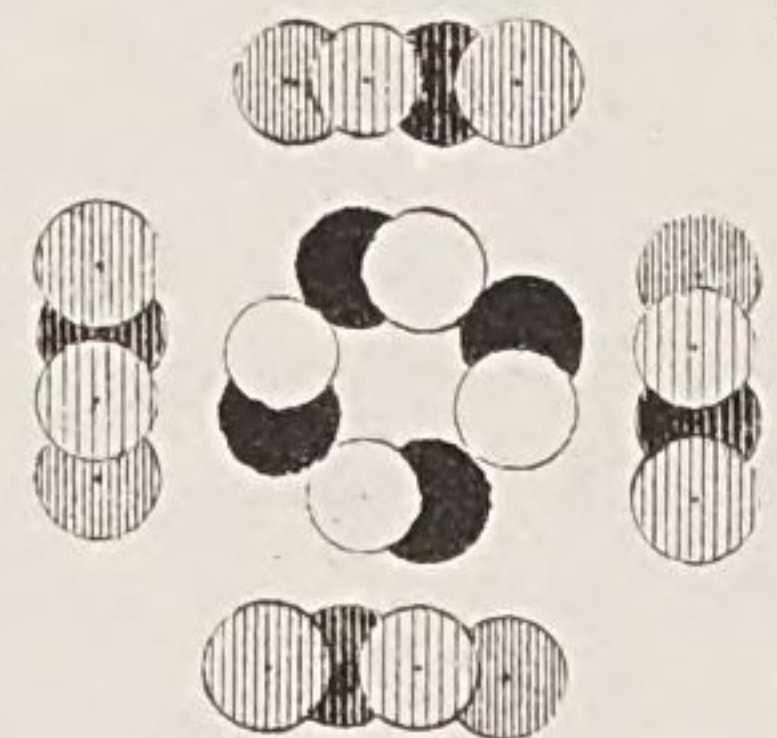


Zu 54, 55, 56.
Der 12 = punktner.

VI.



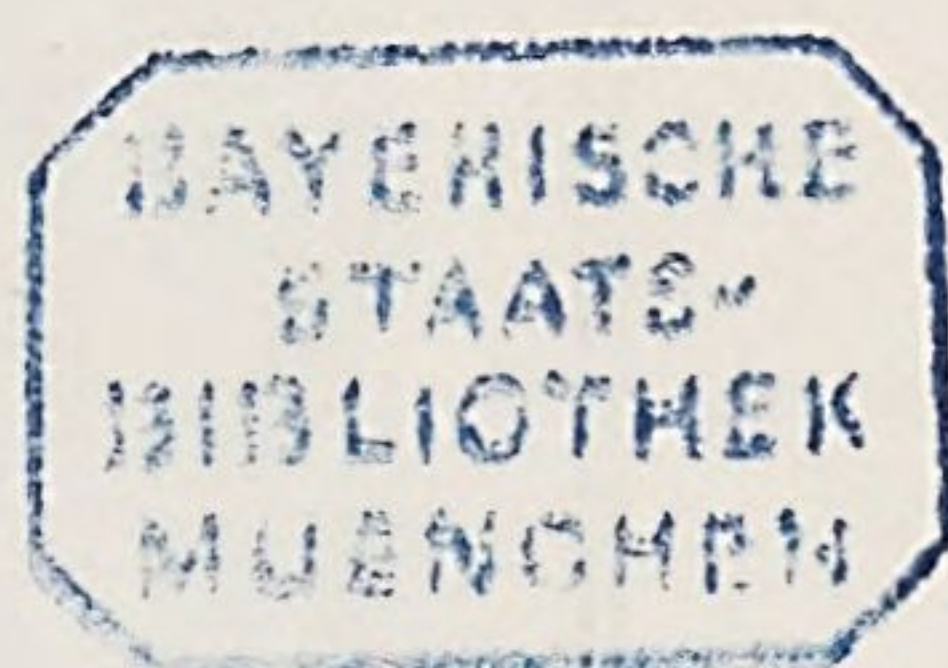
65. Rechtes } reguläres 4 = punkt =
66. Linkes } schraubensystem.



Zu 59, 60, 61.
Der 24 = punktner.

VII.

VII.



Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. II. Heft. A. u. d. T.: Zeitschrift für Mathematik und Physik. XXIV. Jahrg. Supplement. [240 S.] gr. 8. Geh. n. *M* 5.—

Inhalt: I. Die deutsche Coss. Von P. TREUTLEIN, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe. II. Der Traktat des Jordanus Nemorarius „de numeris datis“. Herausgegeben von P. TREUTLEIN. III. Zur Geschichte der Mathematik. 1. Das Trapez bei Euklid, Heron und Brahmagupta. Von Dr. H. WEISSENBORN, Professor am Realgymnasium zu Eisenach. IV. Zur Geschichte der Mathematik. 2. Die Boetius-Frage. Von Dr. H. WEISSENBORN.

Bardey, Dr. G., methodisch geordnete Aufgabensammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Theile der Elementar-Arithmetik für Gymnasien, Realschulen und polytechnische Lehranstalten. Siebente (Doppel-) Auflage. gr. 8. [XII u. 322 S.] geh. *M* 2.70.

Die Resultate werden nur an Lehrer geliefert, welche sich unter Beifügung von *M* 1.— (in Briefmarken) deshalb direkt an die Verlagshandlung wenden.

Beobachtungen, meteorologische, in Deutschland angestellt an 17 Stationen zweiter Ordnung im Jahre 1876. [VII u. 116 S.] gr. 4. geh. n. *M* 8.—

Durège, Dr. H., ord. Professor an der Universität zu Prag, Theorie der elliptischen Functionen. Versuch einer elementaren Darstellung. Dritte Auflage. [VIII u. 390 S.] gr. 8. geh. n. *M* 9.—

Königsberger, Dr. Leo, Professor der Mathematik an der Universität zu Wien, Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. [VI u. 170 S.] gr. 8. geh. n. *M* 4.80.

Mansion, Dr. P., Professor an der Universität zu Gent, Elemente der Theorie der Determinanten mit vielen Uebungsaufgaben. [IV u. 50 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.20.

[Uebersetzt von Dr. Horn, unter Mitwirkung von Dr. S. Günther.]

Matthiessen, Ludwig, ord. Professor a. d. Universität zu Rostock, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. [XVI u. 1001 S.] gr. 8. geh. n. *M* 20.—

Müller, Dr. Hubert, Oberlehrer am Kaiserl. Lyceum zu Metz, Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. I. Theil 1. Heft. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. Mit Uebungen. Zweite umgearbeitete Auflage. (Mit zahlreichen Holzschnitten im Text und 2 lithogr. Tafeln.) [X, 70 u. 48 S.] gr. 8. geh. n. *M* 1.60.

Müller, Dr. Hubert, Oberlehrer am Kaiserl. Lyceum zu Metz, Leitfaden der ebenen Geometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. I. Theil 2. Heft. Anhang: Erweiterungen zu Theil I und Einleitung in die neuere Geometrie. Mit Uebungen. (Mit vielen Holzschnitten im Text und 2 lithogr. Tafeln.) [36 u. 34 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 1.20.

Neumann, Dr. F., Professor der Physik an der Universität zu Königsberg, Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen. I. und II. Abtheilung. (In einem Band.) [156 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 8.—

Reye, Dr. Th., o. Professor an der Universität zu Strassburg, synthetische Geometrie der Kugeln und linearen Kugelsysteme mit einer Einleitung in die analytische Geometrie der Kugelsysteme. [VIII u. 93 S.] gr. 8. n. *M.* 2.40.

Salmon, G., analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. W. FIEDLER, Professor am eidgenöss. Polytechnikum zu Zürich. Vierte verbesserte Auflage. [XXIV u. 701 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 14.40.

Schlömilch, Dr. Oscar, Geh. Schulrath im Kgl. Sächs. Cultusministerium, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Erster Theil: Aufgaben aus der Differentialrechnung. Dritte Auflage. Mit Holzschnitten im Texte. [VII u. 308 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.—

Serret, J. A., Handbuch der höheren Algebra. Deutsche Uebersetzung von G. WERTHEIM, Lehrer an der Realschule der israelitischen Gemeinde zu Frankfurt a. Main. Erster Band. Zweite Auflage. [VIII u. 528 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 9.—

Somoff, J., Mitgl. d. Akademie und Prof. an der Universität zu Petersburg, theoretische Mechanik. Aus dem Russischen übersetzt von ALEXANDER ZIWET. I. Theil. Kinematik. [XVI u. 412 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 6.80.

Wüllner, Dr. Adolph, Professor der Physik am Polytechnikum zu Aachen, Compendium der Physik für Studirende an Universitäten und technischen Hochschulen. Zwei Bände. [Mit zahlreichen Abbildungen im Text und einer farbigen Spectraltafel.] gr. 8. Geh. Beide Bände zusammen n. *M.* 19.20. Einzeln jeder Band à n. *M.* 9.60.

I. Band. Allgemeine Physik, Akustik und Optik. (VIII u. 659 S.)

II. Band. Die Lehre von der Wärme, dem Magnetismus und der Elektrizität. (VIII u. 703 S.)



Sohncke, Leonhard,

Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur

Leipzig 1879

Lith. 378 k

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11390447-0